

## **Capítulo 1 – Introdução**

No mercado brasileiro de previdência complementar aberta e de seguro, regulado e fiscalizado pela Superintendência de Seguros Privados – SUSEP, os planos de previdência e de seguro de vida que possuam a cobertura de sobrevivência (aposentadoria) necessitam de prévia aprovação para serem comercializados. As seguradoras e entidades abertas de previdência complementar - EAPC devem fixar as tábuas biométricas e as taxas de juros que serão utilizados em seus planos no momento dessa aprovação. Portanto, as tábuas biométricas são válidas da entrada do primeiro consumidor do plano até a morte da última pessoa em recebimento de renda, um longo intervalo de tempo.

Um dos maiores problemas enfrentados por estas companhias é decidir que tábua biométrica de mortalidade será utilizada na cobertura de sobrevivência de seus planos, pois esta deverá ser sempre usada para cálculos das contribuições, nos planos de previdência, e dos prêmios, nos planos de seguro, bem como no cálculo dos valores das rendas e das provisões. Esse problema vem freqüentemente aumentando em função da tendência de redução da mortalidade da população e da utilização pelo mercado de tábuas de mortalidade construídas com experiências de outros países, em sua maioria americanas.

A constituição de provisões matemáticas pelas companhias, que medem os compromissos futuros destas, é realizada com base nos valores das anuidades, como podemos verificar no capítulo 6. Estas por sua vez são calculadas em função das probabilidades de morte constantes da tábua biométrica e da taxa de juros fixadas no plano. Os valores das anuidades, bem como das provisões matemáticas, são inversamente proporcionais à taxa de juros e às probabilidades de morte. Assim, para evitar a constituição de provisões matemáticas a menor que o necessário e conseqüente insolvência da empresa, devido à falta de conhecimento sobre a mortalidade da população exposta, os atuários das companhias estão deixando de lado a estatística e a atuária e se prevenindo de eventuais perdas com a fixação de taxas de juros reduzidas, na sua maior parte igual a zero. Com isso, espera-se compensar futuros prejuízos técnicos pelo mau dimensionamento das tábuas biométricas de mortalidade, ou seja, utilização de probabilidades de morte superiores à real mortalidade da massa exposta na

cobertura de sobrevivência, com ganhos financeiros decorrentes da garantia de uma baixa taxa de juros. Dessa forma, o mercado segurador está se tornando cada dia menos técnico.

Para tentar avaliar a real mortalidade do público que compra planos de seguro e previdência no Brasil, a SUSEP, a partir de 1998, vem solicitando dados do mercado segurador e firmou um convênio com o Instituto Brasileiro de Geografia Estatística – IBGE para obtenção de tábuas biométricas.

A partir dos dados coletados, entre os anos de 1998 e 2001, iremos utilizar a estatística bayesiana para obtenção de tábuas biométricas de mortalidade, para ambos os sexos, que reflitam a real mortalidade dos expostos ao risco na cobertura de sobrevivência dos planos de seguro de vida e de previdência complementar aberta no Brasil.

Para obtenção das probabilidades de mortes constantes das tábuas de mortalidade construídas, será utilizado o processo de graduação bayesiana, onde essas probabilidades serão estimadas em função da distribuição preditiva do número de mortes, o qual é modelado como sendo Poisson distribuído, considerando que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com a mesma probabilidade. A graduação é fundamental para suavizar as taxas brutas de mortalidade, fazendo com que as probabilidades de mortes sejam crescentes em relação às idades.

Vamos propor, neste trabalho, três modelos paramétricos e três modelos não paramétricos (em forma livre) de graduação bayesiana. Com base nos modelos: paramétrico e não paramétrico que obtenham, simultaneamente, melhor ajuste aos dados observados e melhor predição dos dados replicados, iremos construir as tábuas de mortalidade por meio de modelos bayesianos estáticos e dinâmicos.

Após a comparação entre as tábuas de mortalidade bayesianas construídas, a mais adequada será confrontada com conhecidas tábuas de mortalidade, para verificarmos se estas estão defasadas, ou seja, possuem probabilidades de morte superiores à realidade da população em estudo.

Demonstraremos, também, a importância da adequação da tábua biométrica de mortalidade, utilizada na cobertura de sobrevivência, à realidade da massa exposta ao risco para que a companhia mantenha-se solvente. Isto será feito pelo cálculo da provisão matemática, comparando o método determinístico, adotado pelo mercado

segurador, com o método bayesiano proposto, onde utilizaremos conceitos de análise de decisões: funções de perda e a classe de medidas de risco denominada valor em risco (*value at risk* - VaR).

A implementação dos modelos bayesianos apresentados neste trabalho será realizada através de simulação estocástica via cadeias de Markov - MCMC, particularmente o Amostrador de Gibbs, implementado através do pacote computacional WinBUGS (versão 1.4), uma versão para windows do pacote BUGS (*Bayesian inference Using Gibbs Sampling*).

Esta tese é estruturada da seguinte forma:

- no capítulo 2 é apresentada a análise dos dados utilizados;
- no capítulo 3, apresentamos conceitos de graduação de taxas de mortalidade e de graduação bayesiana, bem como alguns conceitos básicos de atuária;
- no capítulo 4 são descritos seis modelos de graduação bayesiana, sendo três modelos não paramétricos (em forma livre) e três paramétricos, e estes são comparados, após os testes de convergência, para obtenção de um modelo não paramétrico e um paramétrico de melhor ajuste;
- no capítulo 5 são construídas tábuas de mortalidade bayesianas, para cada sexo, utilizando modelos estáticos e dinâmicos tendo como base os modelos de graduação bayesiana mais adequados obtidos no capítulo anterior. E, após a comparação entre os modelos propostos, a tábua de mortalidade obtida pelo melhor modelo é comparada com conhecidas tábuas de mortalidade;
- no capítulo 6 é demonstrada a importância da adequação de uma tábua biométrica à real mortalidade da população exposta ao risco para que a seguradora/EAPC mantenha-se solvente, através do cálculo da provisão matemática, por meio de MCMC, fazendo uso dos conceitos de funções de perda e valor em risco (*value at risk* - VaR); e
- no capítulo 7, apresentamos algumas conclusões.

## **Capítulo 2 - Análise dos Dados**

Este trabalho é realizado com os dados referentes aos segurados, participantes e assistidos dos planos de previdência complementar aberta e de seguro de vida individual que possuam a cobertura por sobrevivência. Podemos definir segurado como pessoa física que contrata um plano de seguro, participante como pessoa física que contrata um plano de previdência e assistido como pessoa física que esteja recebendo renda em um plano de seguro ou previdência, podendo este ter sido, antes da concessão da renda, um segurado/participante ou beneficiário de algum segurado/participante.

Os dados estudados foram coletados pela SUSEP de todas as empresas fiscalizadas (seguradoras e entidades abertas de previdência complementar – EAPC) que operam em previdência complementar aberta e no ramo vida individual.

Como estamos somente considerando a cobertura de sobrevivência, levamos em conta apenas os dados de seguro referentes ao ramo de vida individual, pois até o último ano analisado não havia plano de seguro de vida coletivo com cobertura de sobrevivência, sendo este comercializado apenas com a criação do produto Vida Gerador de Benefícios Livres - VGBL no ano 2002.

Os dados referem-se aos anos de 1998 a 2001 e foram solicitados através de regulação específica. A Circular SUSEP n.º 63, de 9 de setembro de 1998, requereu os dados de seguro de vida individual e previdência complementar aberta dos anos de 1998 e 1999. Os dados do ano 2000, com a revogação daquela Circular foram requisitados por meio da Circular SUSEP n.º 135, de 08 de agosto de 2000. Já os dados referentes ao ano de 2001, foram requisitados por força da Circular SUSEP n.º 184, de 28 de março de 2002.

Para cada ano foram solicitados pelo órgão fiscalizador quatro quadros específicos:

- quadro 1: dados dos participantes ou segurados, ou seja, expostos ao risco no ano de estudo.
- quadro 2: dados dos participantes ou segurados que saíram dos planos e foram avisados à empresa no ano de estudo.
- quadro 3: dados dos assistidos, ou seja, expostos ao risco no ano de estudo.

- quadro 4: dados referentes aos assistidos que saíram dos planos e foram avisados à empresa no ano de estudo.

O quadro 1 encontra-se desagregado por: produto (vida ou previdência), cobertura, data de nascimento, data de ingresso no plano, sendo esta preenchida com 000000 se o segurado ou participante estiver no plano desde o ano anterior e 999999 se o segurado ou participante estiver no plano no fim do ano corrente, e quantidades de segurados/participantes por sexo.

O quadro 2 encontra-se desagregado por: produto (vida ou previdência), cobertura, data de nascimento, motivo de saída, data de ocorrência do evento gerador, data do aviso à empresa e quantidades de segurados/participantes.

O quadro 3 possui a mesma estrutura do quadro 1, porém os produtos são divididos em renda de aposentadoria, renda por invalidez e renda por pensão.

O quadro 4 difere-se do quadro 2 somente no que diz respeito aos produtos, que são classificados da mesma maneira do quadro 3.

Como já mencionado, neste trabalho serão estudadas as taxas de mortalidade relativas aos consumidores que possuam a cobertura de sobrevivência. Por isso, foram considerados, no quadro 1, os expostos ao risco que possuíam essa cobertura, no quadro 2, somente os que constavam a morte como motivo de saída do plano e que possuíam a cobertura de sobrevivência. Já no quadro 3, foram considerados os assistidos que estavam recebendo renda de aposentadoria ou renda de pensão, deixando de lado os assistidos em gozo de renda por invalidez, pois o risco assumido pela seguradora/EAPC, neste caso, é a sobrevivência do assistido inválido, sendo este risco não analisado neste trabalho. No quadro 4, foram considerados somente os assistidos que constavam como motivo de saída a morte e que estavam recebendo renda de aposentadoria ou renda de pensão.

Os dados dos anos analisados não estavam separados por pessoa física, chaveados como por exemplo pelo CPF, e sim agrupados por quantidades e sexo, essa solicitação só foi adotada a partir de 2001. Dessa forma, caso um consumidor possuísse mais de um plano, este seria considerado mais de uma vez na base de dados, gerando multiplicidade de informação, tanto no número de expostos como no número de mortos.

A partir do banco de dados original, fornecido pelo Centro de Estatística da SUSEP, os dados utilizados nesta tese (quantidade central de expostos ao risco e número de mortes) foram agrupados por ano de estudo, idade e sexo.

## 2.1 Determinação da quantidade central de expostos ao risco

Para determinação da quantidade central de expostos ao risco de sobrevivência em cada ano, discriminada por sexo, calculamos a média de expostos entre o início do ano e o fim do ano.

Para totalização da quantidade central de expostos ao risco por idade e sexo em cada ano somamos os expostos segurados/participantes e os expostos assistidos, como podemos verificar na Tabelas 2.1.

Tabela 2.1: Totalização da quantidade central de expostos ao risco nos anos de 1998 a 2001, considerando o número de expostos no início do ano e no fim do ano, para segurados/participantes e assistidos.

	homens			mulheres		
	início do ano	fim do ano	quantidade central de expostos	início do ano	fim do ano	quantidade central de expostos
<b>ano de 1998</b>						
segurados/participantes	884.878	1.044.374	964.657	411.864	524.725	468.313
assistidos	15.068	25.770	20.446	11.031	15.495	13.291
total	899.946	1.070.144	985.103	422.895	540.220	481.604
<b>ano de 1999</b>						
segurados/participantes	1.130.239	1.426.600	1.278.445	543.443	729.194	636.346
assistidos	30.183	28.387	29.311	24.548	21.947	23.273
total	1.160.422	1.454.987	1.307.756	567.991	751.141	659.619
<b>ano de 2000</b>						
segurados/participantes	1.321.999	1.680.386	1.501.218	648.319	880.973	764.671
assistidos	27.817	30.260	29.064	20.939	22.595	21.793
total	1.349.816	1.710.646	1.530.282	669.258	903.568	786.464
<b>ano de 2001</b>						
segurados/participantes	1.600.624	1.885.742	1.743.211	828.453	1.016.114	922.309
assistidos	31.789	35.735	33.792	22.276	26.392	24.363
total	1.632.413	1.921.477	1.777.003	850.729	1.042.506	946.672

Com a análise da Tabela 2.1, podemos notar que a população em estudo do sexo feminino representa por volta de 50% da população do sexo masculino. Verificamos,

ainda, um grande aumento do número de segurados/participantes no decorrer dos anos, isto se deve principalmente ao crescimento das vendas de previdência, alavancadas pelas vendas do produto Plano Gerador de Benefícios Livres – PGBL, e pela estabilidade da economia. Outro fator importante para explicar o crescimento do número de expostos entre os anos de 1998 e 1999, acima de 30%, foi que houve muita resistência das empresas ao envio dos dados, no ano de 1998, por tratar-se do primeiro ano e pelo fato de não possuírem sistemas específicos para tratamento dos dados, problema que está sendo resolvido com o passar dos anos.

Nos Gráficos 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, apresentamos a distribuição dos expostos ao risco de sobrevivência por sexo nos anos de 1998, 1999, 2000 e 2001, respectivamente. Podemos observar que há uma concentração da população em torno das idades compreendidas entre 20 anos e 60 anos, sendo que está faixa etária absorve em média 95% da população masculina e 93% da população feminina.

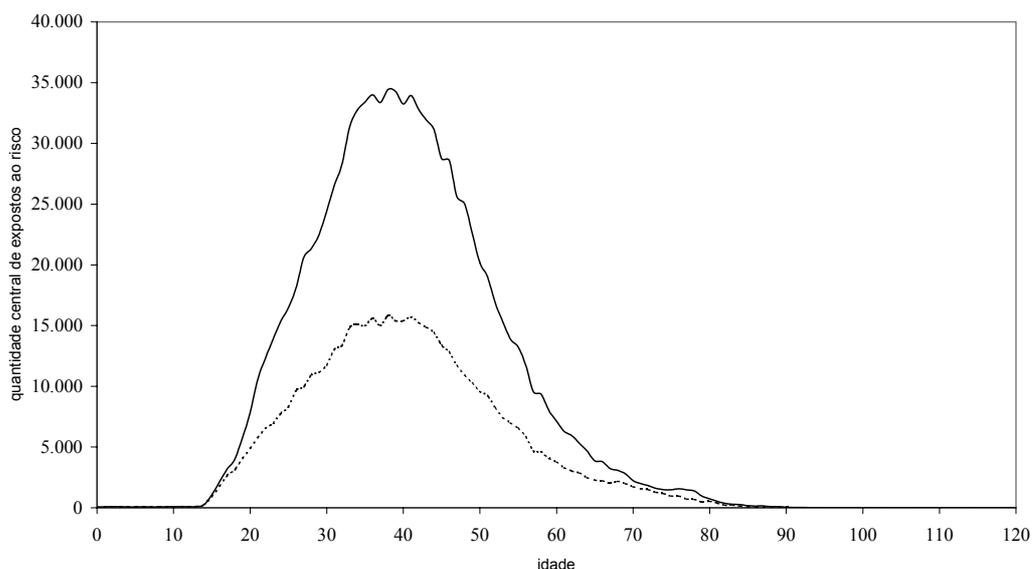


Gráfico 2.1: Quantidade de expostos ao risco por idade e sexo no ano de 1998, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

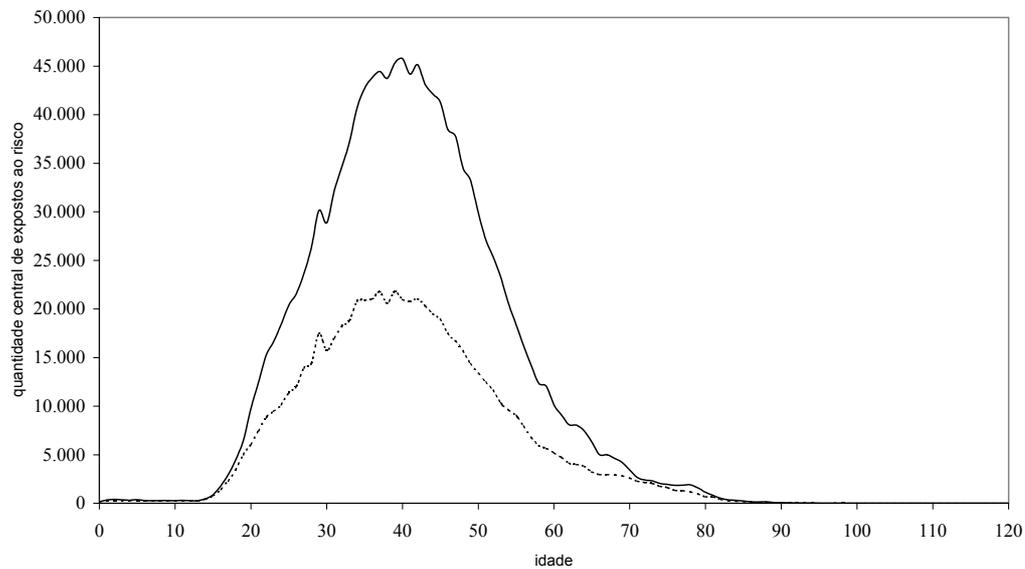


Gráfico 2.2: Quantidade de expostos ao risco por idade e sexo no ano de 1999, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

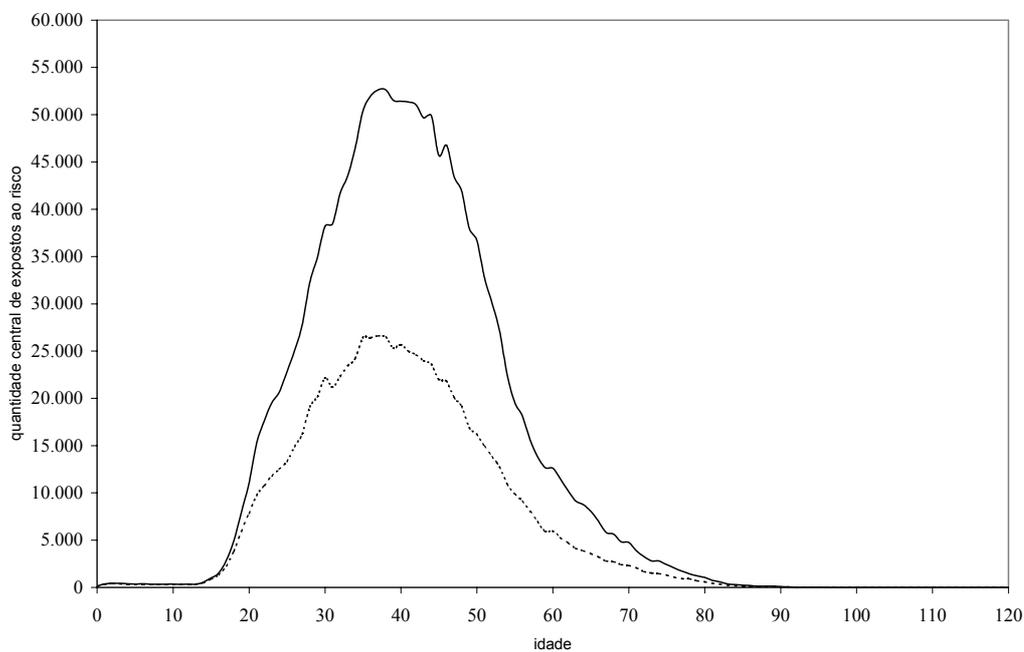


Gráfico 2.3: Quantidade de expostos ao risco por idade e sexo no ano de 2000, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

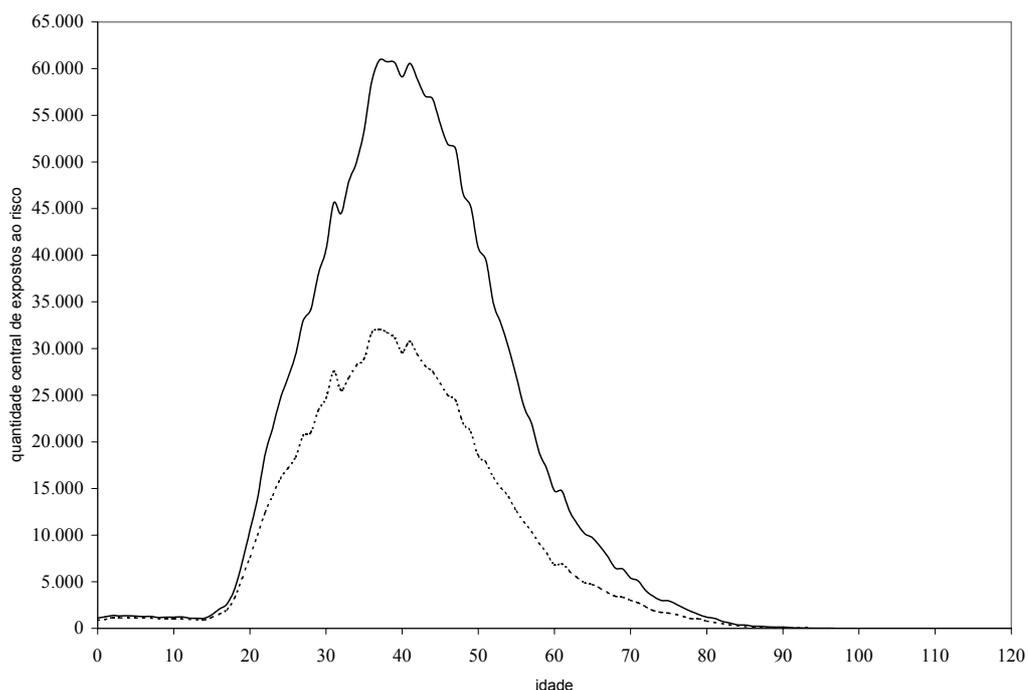


Gráfico 2.4: Quantidade de expostos ao risco por idade e sexo no ano de 2001, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

Nos Gráficos 2.5 e 2.6, podemos observar que o aumento do número de expostos no decorrer do tempo foi distribuído por todas as idades e independente do sexo. No entanto, no ano de 2001, houve um grande aumento do número de expostos para baixas idades, fruto do crescimento da campanha de vendas de planos de previdência para menores de idade por parte de algumas companhias.

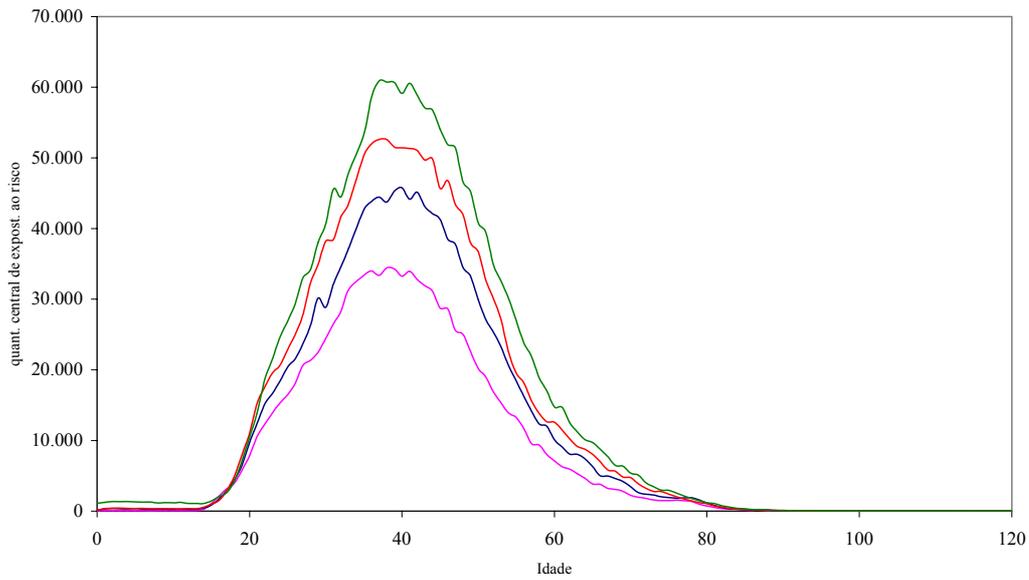


Gráfico 2.5: Quantidade de expostos ao risco do sexo masculino entre os anos de 1998 e 2001, onde 1998 (rosa), 1999 (azul), 2000 (vermelho) e 2001 (verde).

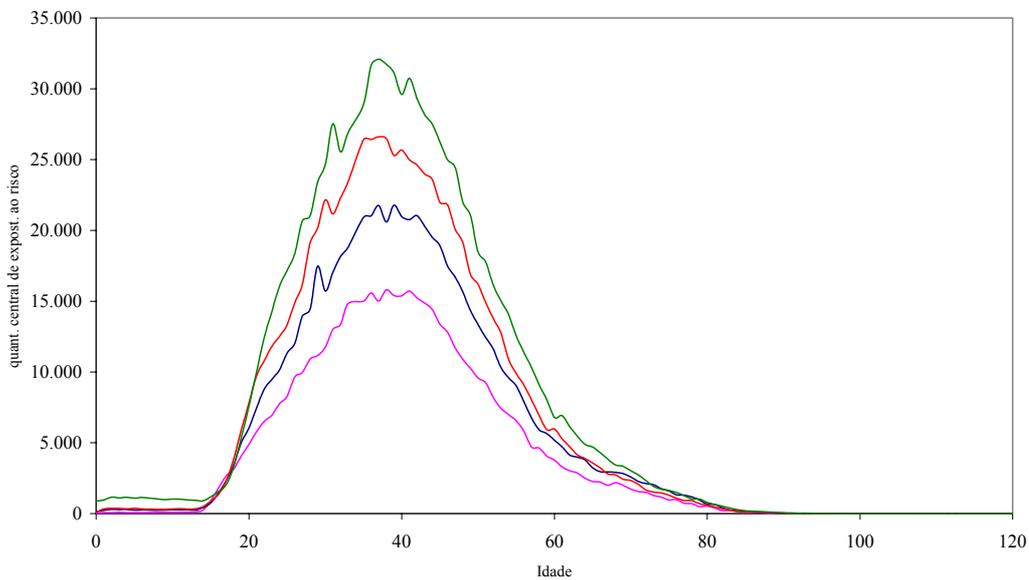


Gráfico 2.6: Quantidade de expostos ao risco do sexo feminino entre os anos de 1998 e 2001, onde 1998 (rosa), 1999 (azul), 2000 (vermelho) e 2001 (verde).

Na obtenção da quantidade de expostos ao risco de sobrevivência observa-se dois tipos de problema nos dados, também abordados por Beltrão e Sugahara (2003), são eles:

1. problema de continuidade da informação: o número de segurados/participantes no final do ano anterior, para cada idade e sexo, deveria ser igual ao número de segurados/participantes no início do ano subsequente. A mesma consideração é válida para o número de assistidos.
2. problema de balanço anual da informação: o número de segurados/participantes no fim de cada ano, para cada idade e sexo, deveria ser igual ao número inicial acrescido da quantidade de entradas e reduzido da quantidade de saídas no ano. A mesma consideração é válida para o número de assistidos.

Com a análise da Tabela 2.2 verificamos que com o passar dos anos o problema de continuidade da informação referente à cobertura de sobrevivência está diminuindo. Sendo este mais grave para os assistidos entre os anos de 1998 e 1999, mas devido ao baixo número de assistidos, este problema não tem grande peso relativo na população estudada.

Tabela 2.2: Diferença percentual entre expostos no início do ano corrente e no fim do ano anterior, para os sexos masculino e feminino, entre os anos de 1998 e 2001.

	$\Delta\%$ 98/99	$\Delta\%$ 99/00	$\Delta\%$ 00/01
	sexo masculino		
segurados/participantes	8,22%	-7,33%	-4,75%
assistidos	17,12%	-2,01%	5,05%
total	8,44%	-7,23%	-4,57%
	sexo feminino		
segurados/participantes	3,57%	-11,09%	-5,96%
assistidos	58,43%	-4,59%	-1,41%
total	5,14%	-10,90%	-5,85%

Analisando, ainda, problema de continuidade da informação por idade nos anos de estudo, considerando em conjunto o número de segurados/participantes e o número de assistidos, podemos notar, por meio da análise dos Gráficos 2.7 e 2.8, que o grande problema encontra-se na população inferior a 20 anos e superior a 60 anos, e, ainda, conforme comentado, que anualmente há uma redução gradual do problema.

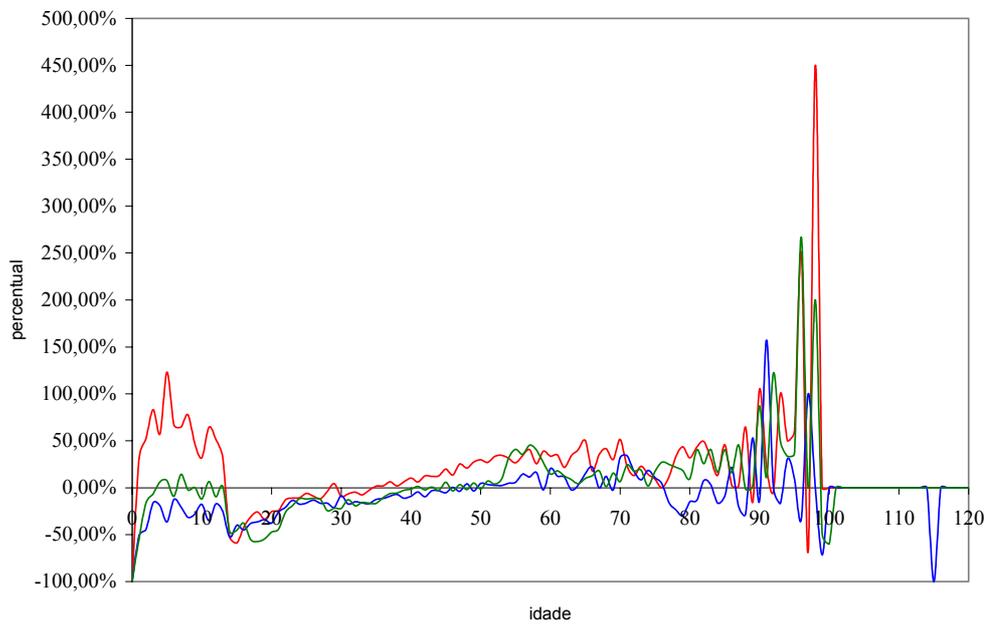


Gráfico 2.7: Diferença percentual entre os expostos ao risco do sexo masculino no início do ano corrente e no fim do ano anterior, onde  $\Delta\% 98/99$  (vermelho),  $\Delta\% 99/00$  (azul) e  $\Delta\% 00/01$  (verde).

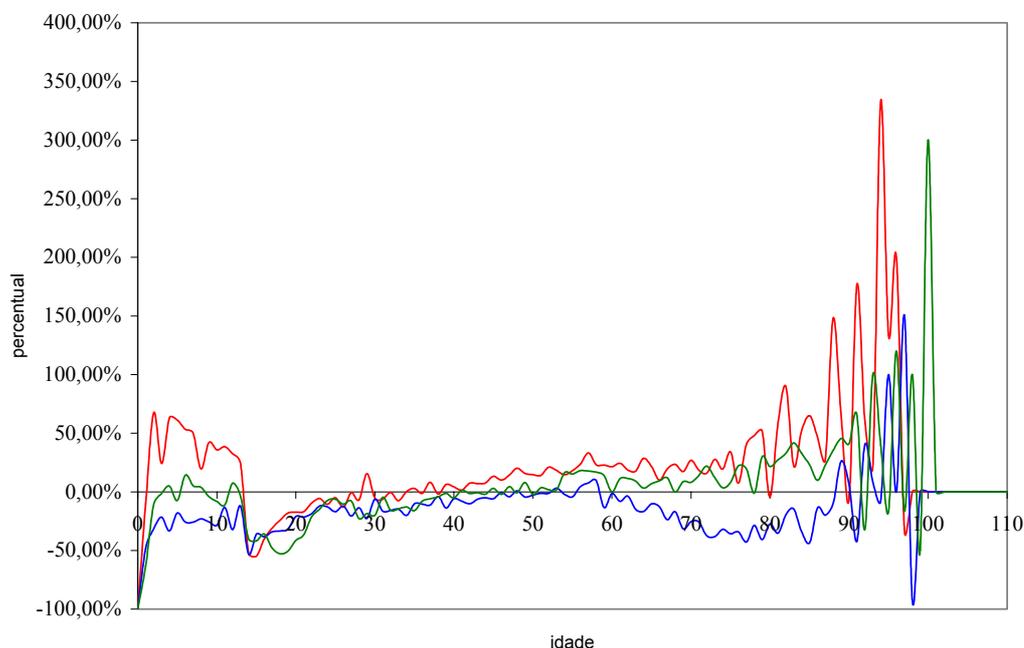


Gráfico 2.8: Diferença percentual entre os expostos ao risco do sexo feminino no início do ano corrente e no fim do ano anterior, onde  $\Delta\%$  98/99 (vermelho),  $\Delta\%$  99/00 (azul) e  $\Delta\%$  00/01 (verde).

Quanto ao problema de balanço anual da informação, na Tabela 2.3, calculamos a diferença percentual entre o número de expostos reportados no fim do ano e o número de expostos calculados de acordo com o número de expostos no início do ano e a movimentação entre entradas e saídas de expostos, ou seja:

$$\Delta\% = \frac{\text{exp\_fim}}{(\text{exp\_in} + \text{ent} - \text{sai})} - 1, \text{ onde:}$$

exp\_fim: número de expostos reportados no fim do ano;

exp\_in: número de expostos reportados no início do ano;

ent: entradas de expostos no decorrer do ano; e

sai: saídas de expostos no decorrer do ano.

Para contagem do número de expostos que saíram dos planos no decorrer de cada ano são considerados todos os motivos de saída disponíveis no banco de dados: morte, invalidez, sobrevivência (aposentadoria) e outras saídas (resgate,

cancelamento,...), para os dados referentes aos segurados/participantes, e morte e outras saídas (término do prazo de recebimento de renda, obtenção da maioridade - no caso de renda paga aos menores,...), para os dados referentes aos assistidos.

Tabela 2.3: Diferença percentual encontrada no problema de balanço anual da informação nos anos de 1998 a 2001, para ambos os sexos, considerando a segregação entre segurados/participantes e assistidos.

<b>homens - 1998</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	884.878	549.292	390.416	1.044.374	0,06%
assistidos	15.068	21.033	9.118	25.770	-4,50%
total	899.946	570.325	399.534	1.070.144	-0,06%
<b>mulheres - 1998</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	411.864	288.515	175.781	524.725	0,02%
assistidos	11.031	9.197	3.765	15.495	-5,88%
total	422.895	297.712	179.546	540.220	-0,16%
<b>homens - 1999</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	1.130.239	756.048	475.581	1.426.600	1,13%
assistidos	30.183	2.807	4.616	28.387	0,05%
total	1.160.422	758.855	480.197	1.454.987	1,11%
<b>mulheres - 1999</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	543.443	409.898	229.362	729.194	0,72%
assistidos	24.548	1.891	4.494	21.947	0,01%
total	567.991	411.789	233.856	751.141	0,70%
<b>homens - 2000</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	1.321.999	858.326	485.320	1.680.386	-0,86%
assistidos	27.817	18.959	16.547	30.260	0,10%
total	1.349.816	877.285	501.867	1.710.646	-0,85%
<b>mulheres - 2000</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	648.319	489.342	261.916	880.973	0,60%
assistidos	20.939	8.913	7.234	22.595	-0,10%
total	669.258	498.255	269.150	903.568	0,58%
<b>homens - 2001</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	1.600.624	951.704	723.732	1.885.742	3,13%
assistidos	31.789	14.739	9.801	35.735	-2,70%
total	1.632.413	966.443	733.533	1.921.477	3,01%
<b>mulheres - 2001</b>	exp_in	ent	sai	exp_fim	$\Delta\%$
segurados/participantes	828.453	537.416	370.816	1.016.114	2,12%
assistidos	22.276	7.170	4.020	26.392	3,80%
total	850.729	544.586	374.836	1.042.506	2,16%

Com a análise da Tabela 2.3, podemos concluir que o problema de balanço anual da informação é menor do que o problema de continuidade da informação. Contudo, notamos um crescimento daquele problema no ano de 2001, se comparado com os demais anos.

Os problemas relatados devem-se a falta de controle na coleta e no manuseio dos dados por parte de algumas seguradoras/EAPC's, pois a obrigatoriedade de envio de dados é recente no país. Esses problemas já foram previamente reduzidos pelo Centro de Estatística da SUSEP, que disponibiliza via internet um sistema de crítica de dados às companhias.

## **2.2 Determinação do número de mortes**

Para o cálculo das taxas brutas de mortalidade para cobertura de sobrevivência é necessária a apuração do número de mortes, por sexo e idade, ocorridos a cada ano com indivíduos que possuíam a cobertura de sobrevivência.

Contudo, pode ocorrer uma defasagem no aviso de sinistro por parte dos beneficiários à companhia de seguros, ou seja, óbitos ocorridos em um determinado ano podem ser reportados às empresas em anos subsequentes.

Os óbitos ocorridos em 1998 e avisados nos anos de 1999, 2000 e 2001 foram somados aos óbitos ocorridos em 1998 e avisados no mesmo ano, tanto para os segurados/participantes como para os assistidos. Então, como está disponível um banco de dados de quatro anos, nesse estudo consideramos um tempo máximo para aviso de sinistro de três anos. Isto pode ser assumido sem problemas, pois é sabido, em previdência complementar aberta e seguro de vida individual, que não existe um grande atraso no aviso de sinistro de morte por parte dos beneficiários, como podemos observar nas Tabelas 2.4 e 2.5. Sendo este atraso ainda menor quando se trata de aviso de óbito de assistido, conforme disposto nas Tabelas 2.6 e 2.7.

Tabela 2.4: Óbitos ocorridos e avisados referentes aos segurados/participantes do sexo masculino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	ano de aviso				total
	1998	1999	2000	2001	
1998	1.615	109	10	4	1.738
1999		1.810	143	16	1.969
2000			1.495	121	1.616
2001				1.472	1.472

Tabela 2.5: Óbitos ocorridos e avisados referentes aos segurados/participantes do sexo feminino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	ano de aviso				total
	1998	1999	2000	2001	
1998	588	29	3	3	623
1999		723	48	6	777
2000			505	58	563
2001				416	416

Tabela 2.6: Óbitos ocorridos e avisados referentes aos assistidos do sexo masculino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	ano de aviso				total
	1998	1999	2000	2001	
1998	77	0	0	1	78
1999		280	4	2	286
2000			117	6	123
2001				214	214

Tabela 2.7: Óbitos ocorridos e avisados referentes aos assistidos do sexo feminino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	ano de aviso				total
	1998	1999	2000	2001	
1998	29	0	0	0	29
1999		174	0	2	176
2000			102	1	103
2001				80	80

Para determinação do número de óbitos no ano de 1999, somamos os óbitos avisados em 1999, 2000 e 2001 e consideramos a possibilidade de haver sinistros ocorridos em 1999 e reportados à companhia com três anos de atraso. O mesmo procedimento é realizado para os anos de 2000 e 2001, sendo estimada a possibilidade de atraso no aviso de sinistros de 2 e 3 anos para o ano de 2000 e de 1, 2 e 3 anos para o ano de 2001. As estimativas de atraso no aviso de falecimento são realizadas considerando as médias de atrasos ocorridos, separadas por sexo e por categoria, ou seja, segurados/participantes e assistidos. Estas estimativas são apresentados nas Tabelas 2.8 a 2.11.

Tabela 2.8: Percentual de óbitos reportados com atraso em relação aos óbitos reportados no ano da ocorrência, para segurados/participantes do sexo masculino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	tempo de atraso para avisar (em anos)			
	0	1	2	3
1998		6,75%	0,62%	0,25%
1999		7,90%	0,88%	
2000		8,09%		
2001				
média		7,58%	0,75%	0,25%

Tabela 2.9: Percentual de óbitos reportados com atraso em relação aos óbitos reportados no ano da ocorrência, para segurados/participantes do sexo feminino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	tempo de atraso para avisar (em anos)			
	0	1	2	3
1998		4,93%	0,51%	0,51%
1999		6,64%	0,83%	
2000		11,49%		
2001				
média		7,69%	0,67%	0,51%

Tabela 2.10: Percentual de óbitos reportados com atraso em relação aos óbitos reportados no ano da ocorrência, para assistidos do sexo masculino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	tempo de atraso para avisar (em anos)			
	0	1	2	3
1998		0,00%	0,00%	1,30%
1999		1,43%	0,71%	
2000		5,13%		
2001				
média		2,19%	0,36%	1,30%

Tabela 2.11: Percentual de óbitos reportados com atraso em relação aos óbitos reportados no ano da ocorrência, para assistidos do sexo feminino, nos anos de 1998 a 2001.

ano de ocorrência	tempo de atraso para avisar (em anos)			
	0	1	2	3
1998		0,00%	0,00%	0,00%
1999		0,00%	1,15%	
2000		0,98%		
2001				
média		0,33%	0,57%	0,00%

Após estas estimativas, podemos realizar a devida correção no número de óbitos ocorridos, estimando o número de óbitos ocorridos e ainda não avisados. Essa correção é realizada aplicando-se a média para cada ano de atraso (de 1 a 3 anos) sobre o número de mortes ocorridas no ano e avisadas no mesmo ano. Tomando como exemplo o cálculo do número de óbitos dos segurados/participantes no ano de 2001, para sabermos o número de sinistros avisados com atraso de 1 ano para cada idade basta multiplicarmos 7,58% (ver Tabela 2.8) pelo número de mortes de cada idade avisadas e ocorridas no ano de 2001, esse mesmo critério de cálculo será repetido para 2 e 3 anos de atraso no aviso, aplicando 0,75% e 0,25%, respectivamente.

Para determinação do número de falecimentos relativos à cobertura de sobrevivência, por idade e por ano de estudo, são somados os óbitos dos segurados/participantes e dos assistidos. Nos Gráficos 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 apresentamos a distribuição de número de óbitos por idade para os anos 1998, 1999,

2000 e 2001, respectivamente. Podemos notar um número muito baixo de mortes, para algumas idades até iguais a zero, para idades inferiores a 25 anos e superiores a 90 anos.

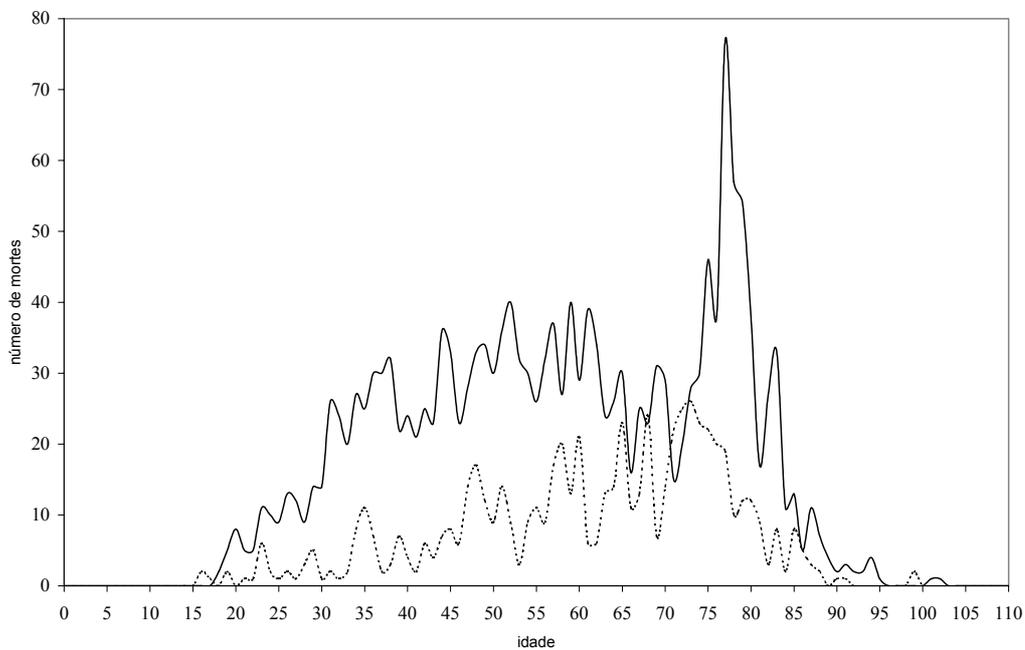


Gráfico 2.9: Número de mortes por idade no ano de 1998, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

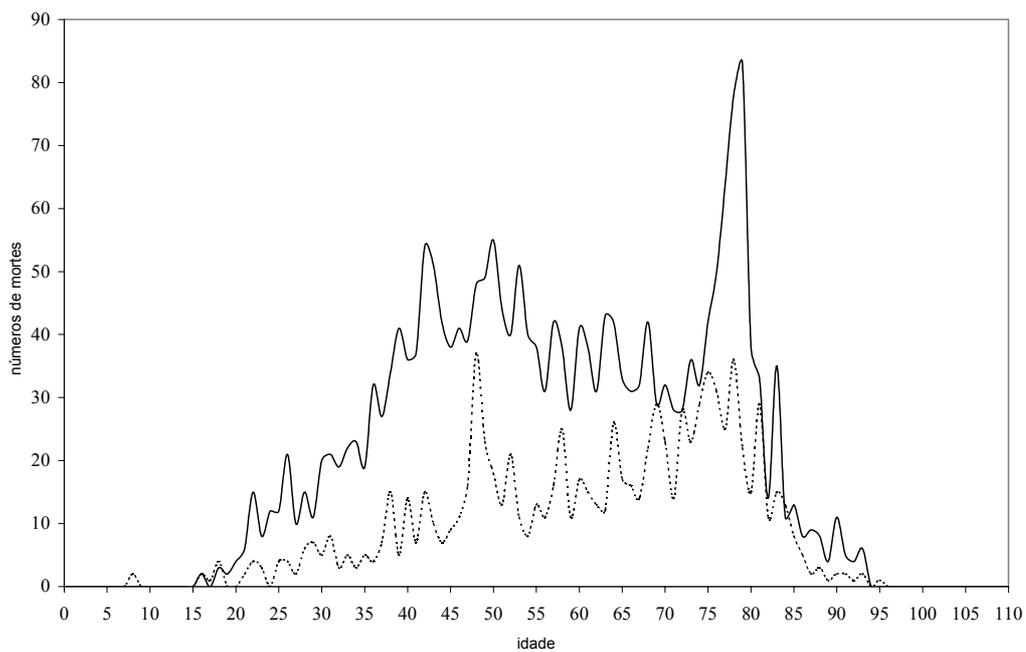


Gráfico 2.10: Número de mortes por idade no ano de 1999, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

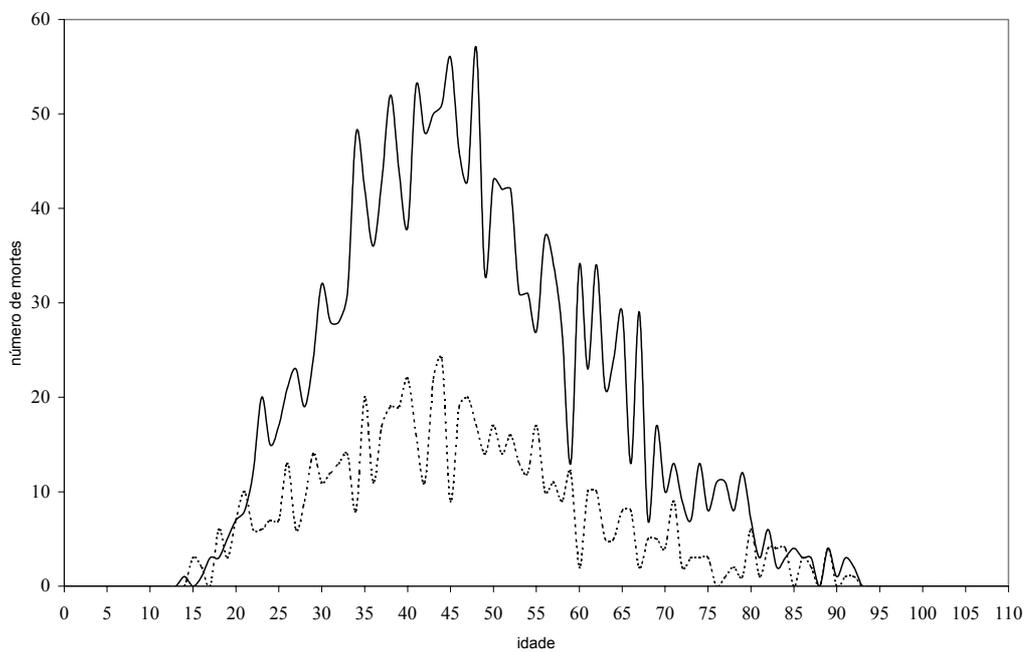


Gráfico 2.11: Número de mortes por idade no ano de 2000, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

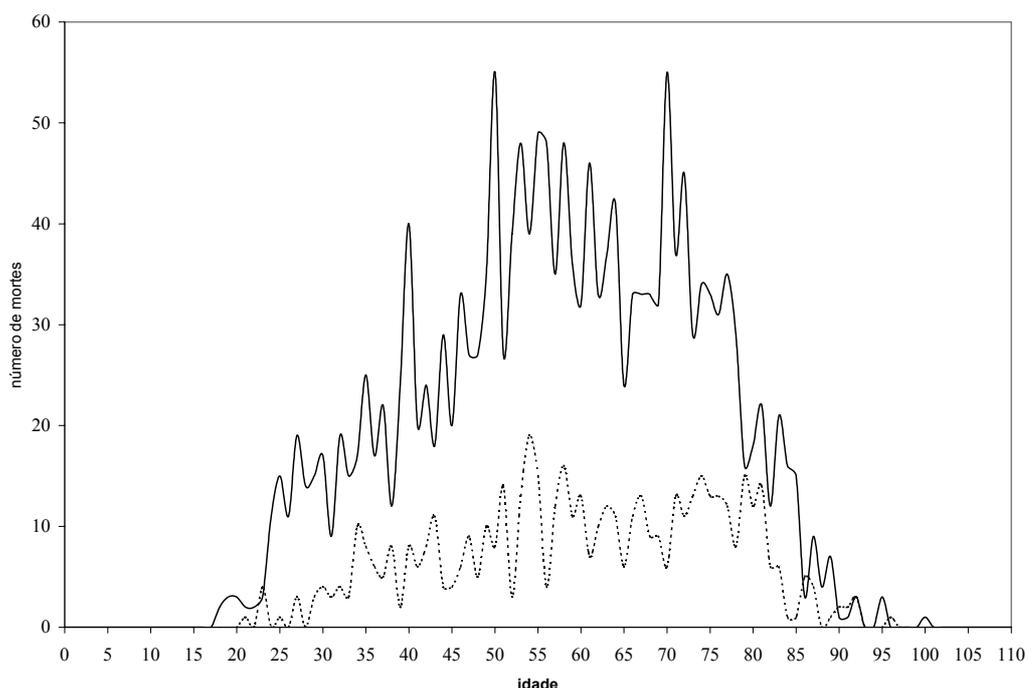


Gráfico 2.12: Número de mortes por idade no ano de 2001, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

Em função do atraso na comunicação de falecimento, a quantidade central de expostos ao risco também deverá sofrer uma pequena correção, pois os sinistros avisados com atraso continuaram sendo reportados como população ativa. A quantidade central de expostos ao risco de sobrevivência em cada ano, segregada por idade e sexo, encontra-se disponível no Anexo I, e o número de mortes relativo à cobertura de sobrevivência considerado neste trabalho, segregada por idade e sexo, encontra-se disponível no Anexo II.

Após a obtenção dos dados utilizados nesta tese (quantidade central de expostos e número de mortes), podemos calcular as taxas brutas de mortalidade para a cobertura de sobrevivência.

### 2.3 Cálculo das taxas brutas de mortalidade

Para o cálculo das taxas brutas de mortalidade no período igual a um ano, para cada idade e sexo, dividimos o número de mortes no ano pela quantidade central de

expostos ao risco no ano, considerando a correspondente idade e sexo, conforme disposto a seguir:

$$r_x = \frac{d_x}{e_x}, \text{ onde:}$$

$r_x$ : taxa bruta de mortalidade na idade  $x$ ;

$d_x$ : número de mortes observadas na idade  $x$ ; e

$e_x$ : quantidade central de expostos ao risco de sobrevivência observados na idade  $x$ .

As taxas brutas de mortalidade para os anos de 1998 a 2001, para ambos os sexos, estão disponíveis no Anexo III.

Nos Gráficos 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16, apresentamos as taxas brutas de mortalidade para ambos os sexos dos anos 1998, 1999, 2000 e 2001, respectivamente. Podemos observar que as taxas de mortalidade brutas observadas possuem tendência de crescimento a partir dos 25 anos de idade. Isso pode ser explicado pela maior incidência de mortes acidentais nos indivíduos mais jovens. Ademais, nos gráficos percebemos a falta de informação para idades inferiores a 20 anos, para o sexo masculino, e inferiores a 30 anos para o sexo feminino, bem como para idades superiores a 90 anos, para ambos os sexos. Devemos notar que essa percepção é obtida considerando que os gráficos estão em escala logarítmica, ou seja, taxas de mortalidade iguais a zero não são representadas nos gráficos.

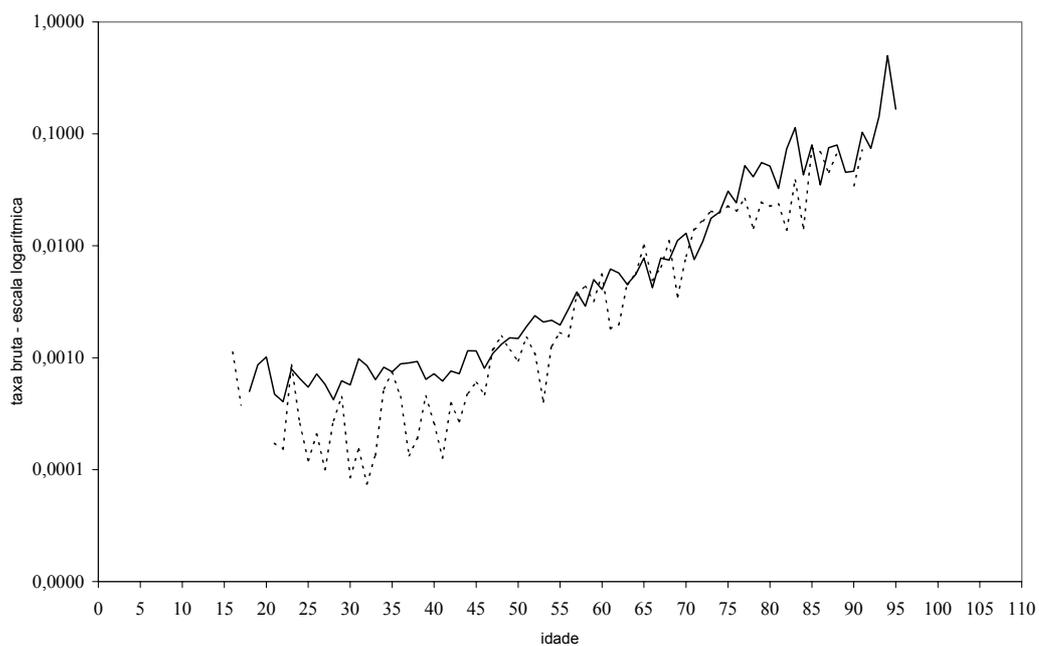


Gráfico 2.13: Taxas brutas de mortalidade por idade para a cobertura de sobrevivência no ano de 1998, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

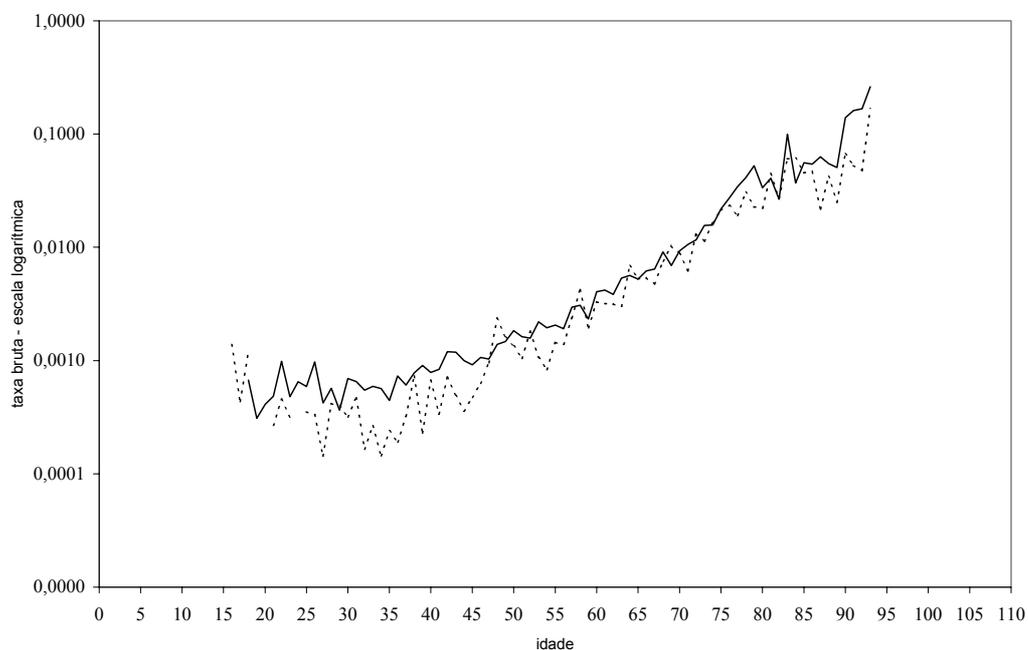


Gráfico 2.14: Taxas brutas de mortalidade por idade para a cobertura de sobrevivência no ano de 1999, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

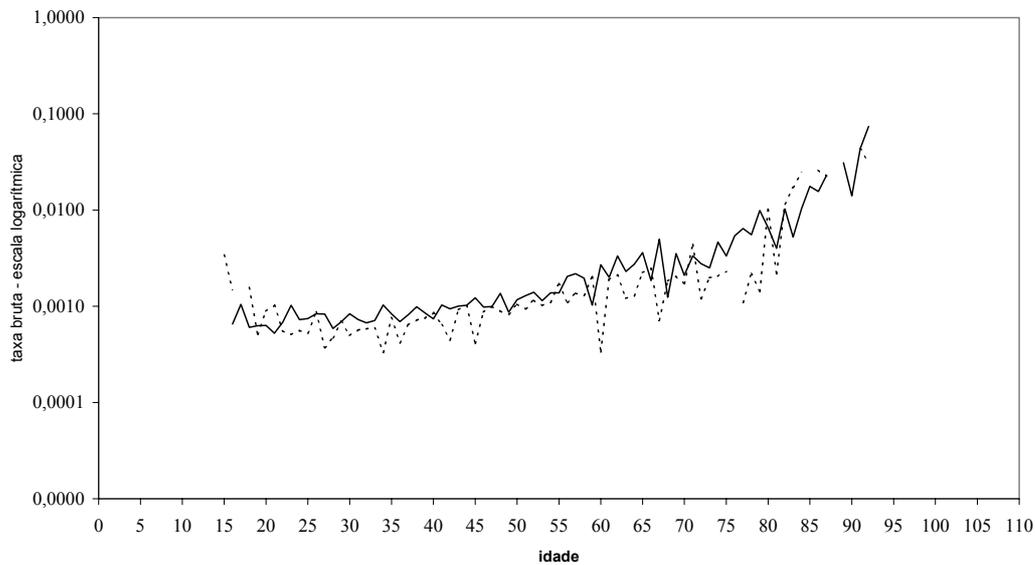


Gráfico 2.15: Taxas brutas de mortalidade por idade para a cobertura de sobrevivência no ano de 2000, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

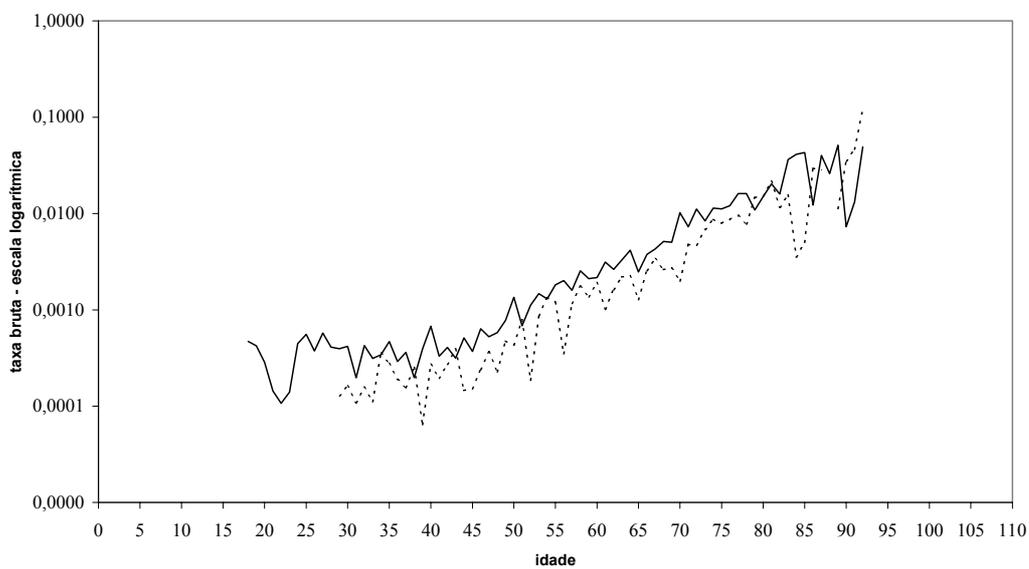


Gráfico 2.16: Taxas brutas de mortalidade por idade para a cobertura de sobrevivência no ano de 2001, onde homens (linha cheia) e mulheres (linha tracejada).

Espera-se que a taxa de mortalidade de um indivíduo mais velho seja superior a de um indivíduo mais jovem. No entanto, as taxas brutas encontradas são muito irregulares em relação à idade, não sendo monotonicamente crescentes com a idade, como observamos nos Gráficos 2.13 a 2.16. Dessa forma, as taxas deverão ser suavizadas para que possam ser utilizadas em planos de seguro de vida e de previdência. O processo de suavização das taxas brutas de mortalidade é conhecido por graduação e será apresentado no capítulo posterior.

### Capítulo 3 - Graduação das Taxas Brutas de Mortalidade

Como disposto no capítulo anterior, após a coleta dos dados observados e obtenção das taxas brutas de mortalidade, esperávamos que estas taxas tivessem uma relação monotonicamente crescente em relação à idade. Como nos dados observados, essa relação não é encontrada, para regularização das taxas de mortalidade em relação à idade, e conseqüente obtenção da desejada tábua de mortalidade, devemos realizar um processo de suavização das taxas brutas encontradas. Esse processo é conhecido como graduação.

A graduação é fundamental para corrigir problemas nos dados e falta de informação para determinada idade estudada, substituindo uma série irregular por uma série suavizada, que segue uma tendência de crescimento em função da idade, com o objetivo final de se obter probabilidades anuais de mortes ( $q_x$ ) monotonicamente crescentes em relação às idades, sendo  $x$  as idades em anos.

Não seria possível a utilização de taxas de mortalidade em planos de previdência e de vida sem a devida graduação, pois como explicar a um segurado de um plano de seguro vida, com prêmios anuais calculados de acordo com a idade, a variabilidade dos prêmios cobrados.

Podemos graduar taxas brutas de mortalidade em função da força de mortalidade ( $\mu_x$ ), usando no processo a quantidade central de expostos ao risco observados, ou em função da probabilidade de morte ( $q_x$ ), usando a quantidade inicial de expostos ao risco observados. Considera-se o número de mortes ( $d_x$ ), no período de estudo e para cada idade  $x$ , modelado com sendo Poisson distribuído com média  $e_x \cdot \mu_x$  -  $\text{Poisson}(e_x \cdot \mu_x)$ , quando a graduação é realizada em relação à força de mortalidade, e considera-se  $d_x$  modelado com sendo Binomial distribuído com média  $e_x \cdot q_x$  -  $\text{Binomial}(e_x, q_x)$ , quando o processo de graduação é realizado em função da probabilidade de morte (Haberman e Renshaw, 1996), partindo do princípio de que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com a mesma probabilidade, onde:

$d_x$ : número de mortes na idade  $x$ ;

$e_x$ : quantidade central de expostos ao risco na idade  $x$ , para graduação em função de  $\mu_x$ , ou quantidade inicial de expostos ao risco na idade  $x$ , para graduação em função de  $q_x$ ;

$q_x$ : probabilidade de um indivíduo falecer entre as idades  $x$  e  $x + 1$ ; e

$\mu_x$ : força de mortalidade, mede a variação instantânea da intensidade de morte, sendo expressa na forma de taxa anual.

Como nesta tese estamos trabalhando com a quantidade central de expostos ao risco, graduaremos as taxas brutas através da força de mortalidade, com  $d_x$  distribuído de acordo como a distribuição Poisson.

Para estimar taxas de mortalidade suavizadas são sugeridos na literatura e utilizados na prática modelos de graduação paramétricos e não paramétricos (em forma livre). Esta categorização de modelos de graduação é citada por Haberman e Renshaw (1996).

As graduações normalmente são realizadas através de modelos paramétricos por adequação da probabilidade de morte ou da força de mortalidade a algum modelo matemático, ajustando as taxas brutas de mortalidade a uma função de sobrevivência fundamentada em leis de mortalidade, tais como as Leis de Moivre, Gompertz, Makeham e Weibull (Bowers *et al.*, 1986). Não podemos deixar de citar que uma ampla classe de modelos estatísticos para curva de crescimento (parâmetros não negativos e crescentes) é apresentada em Migon e Gamerman (1993).

No Brasil, os trabalhos realizados sobre graduação de taxa de mortalidade com dados originários do mercado segurador utilizam estatística clássica e modelos paramétricos não preditivos e estáticos, entre eles destaca-se Beltrão e Sugahara (2003).

Iremos a seguir apresentar a graduação bayesiana das taxas brutas de mortalidade e elencar os modelos que serviram de referência para construção dos modelos de graduação bayesiana propostos no próximo capítulo.

### 3.1 Graduação bayesiana

A abordagem bayesiana do processo de graduação trata-se de estimação estatística de parâmetros desconhecidos, onde são agregados aos dados conhecimentos iniciais sobre os parâmetros estudados.

Alguns trabalhos já foram publicados sobre graduação bayesiana, entre eles: Kimeldorf e Jones (1967), Hickman e Milller (1977), Broffit (1988), Carlin (1992), Gordon (1998) e Mendoza *et al.* (2001).

Os modelos não paramétricos de graduação bayesiana propostos no próximo capítulo são baseados nos modelos descritos em Broffit (1988) e Carlin (1992), já os modelos paramétricos são baseados no modelo de graduação clássico apresentando por Haberman e Renshaw (1996), adaptado para um enfoque bayesiano.

Antes da apresentação dos modelos é importante introduzir alguns conceitos básicos de atuária, entre eles, função de sobrevivência, probabilidade de morte e força de mortalidade.

### 3.2 Conceitos básicos de atuária

Para que os modelos de graduação sejam mais facilmente entendidos apresentaremos, no decorrer desta seção, alguns conceitos básicos de atuária.

A função de sobrevivência  $s(x)$  é uma expressão matemática decrescente que tenta encontrar padrões de sobrevivência nas vidas humanas. Podemos definir  $s(x)$  como a probabilidade de um recém nascido viver até a idade  $X$ . Então, seja  $X$ , idade de morte do recém nascido, uma variável aleatória contínua (Bowers *et al.*, 1986), denotando por  $F(x)$  a distribuição acumulada de  $X$ , têm-se:

$$F(x) = P(X \leq x), x \geq 0, \text{ e}$$

$$s(x) = 1 - F(x) = P(X > x),$$

logo  $s(0) = 1$  e  $s(x_{\text{sup}}) = 1$ , sendo  $x_{\text{sup}}$  a última idade considerada na tábua biométrica.

Seja  $q_x$ , denominada taxa anual de morte, a probabilidade de um indivíduo falecer entre as idade  $x$  e  $x + 1$  e seu complementar,  $p_x$ , a probabilidade de um indivíduo

de idade  $x$  sobreviver até a idade  $x + 1$ , então  $q_x + p_x = 1$ . É importante ressaltar que as tábuas biométricas de mortalidade são construídas em função de  $q_x$ .

Denote por  ${}_t p_0$  a probabilidade de um indivíduo de idade igual a zero sobreviver até a idade  $t$ . Assim,  ${}_t p_0$  igualá-se a  $s(t)$ . Partimos então para as seguintes relações:

$${}_t p_0 = \frac{s(t)}{s(0)} = 1 - P(X \leq t),$$

${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$ , sendo a probabilidade de um indivíduo de idade  $x$  sobreviver até a idade  $x + t$ .

$${}_1 p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)} = p_x = 1 - q_x, \text{ então:}$$

$$q_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)} = P(X \leq x+1 | X > x)$$

Quanto à força de mortalidade ( $\mu_x$ ), conforme descrito em Jordan (1991), esta mede a variação instantânea da intensidade de morte, pois ela não é constante a cada momento. Dessa forma, considerando a  $f(x)$  a função de densidade de  $X$ ,  $F'(x) = f(x)$ , temos:

$$\mu_x = P(x < X < x + \Delta x | X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{f(x) \cdot \Delta x}{1 - F(x)}, \text{ então:}$$

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{-s'(x)}{s(x)}, \mu_x > 0 \text{ e crescentes em relação às idades.}$$

A relação entre a probabilidade de morte e a força de mortalidade (Jordan, 1991) é expressa a seguir:

$${}_n q_x = 1 - \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t} dt\right),$$

sendo  ${}_n q_x$  a probabilidade de um indivíduo falecer entre as idades  $x$  e  $x + n$ .

Assim, para  $n = 1$ , obtemos:

$$q_x = 1 - \exp\left(-\int_0^1 \mu_{x+t} dt\right)$$

Como simplificado por Broffit (1988), podemos considerar  $\mu_x$  constantes nos intervalos de idade (i), a partir de uma idade inicial x. Considerando os intervalos de idade  $i = 1, \dots, k$ , temos:

$$\begin{aligned}\mu_{(y)} &= \theta_i, \quad x+i-1 \leq y \leq x+i \quad \text{e} \\ q_{x+i-1} &= 1 - \exp(-\theta_i)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Nos modelos desenvolvidos neste trabalho, iremos estimar as probabilidades de morte considerando a simplificação descrita em (3.1).

## Capítulo 4 - Modelos de Graduação Bayesiana

Os modelos a serem apresentados nesse capítulo visam a obtenção de taxas de mortalidade suavizadas em função da idade, para cada ano de estudo e para cada sexo, com o objetivo de verificar que modelo paramétrico e não paramétrico, dentre os propostos, são os mais adequados para serem utilizados, no próximo capítulo, como referência na construção de modelos de graduação bayesiana de taxas de mortalidade onde serão considerados os dados de todos os anos disponíveis em conjunto, ou seja, de modelos bayesianos para obtenção de tábuas biométricas de mortalidade que reflitam a realidade do mercado de seguro e previdência no Brasil.

Nos modelos, para graduação bayesiana das taxas brutas de mortalidade referentes à cobertura de sobrevivência nos planos de seguro de vida e de previdência complementar aberta, será utilizada simulação estocástica via cadeias de Markov - MCMC, particularmente o Amostrador de Gibbs, implementado através do pacote computacional WinBUGS versão 1.4 (Spiegelhalter *et al.*, 2003), uma versão para windows do pacote BUGS (*Bayesian inference Using Gibbs Sampling*). Este é um programa de fácil utilização e pode ser obtido sem custo através do site [www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs). É especializado na implementação de MCMC, assumindo um modelo de probabilidade completo, no qual todos os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias.

Nesse capítulo, serão apresentados seis modelos: três modelos de graduação não paramétricos, baseados nos artigos de Broffit (1988) e Carlin (1992) e três modelos paramétricos, com base em modelos lineares generalizados descrito em Haberman e Renshaw (1996), adaptados para um enfoque bayesiano.

Broffit (1988) afirmou que as probabilidades de morte crescem com a idade a partir dos 30 anos. No entanto, analisando as tábuas biométricas utilizadas pelo mercado segurador brasileiro para cobertura de sobrevivência, percebemos que as probabilidades de morte constantes dessas tábuas são crescentes a partir de em média 8 anos de idade.

Como estamos graduando as forças de mortalidade, obtemos as mesmas a partir das tábuas biométricas mais usuais, utilizando a simplificação descrita em (3.1). Com

isso, concluímos que as forças de mortalidade, originadas dessas tábuas, também são crescentes a partir de em média 8 anos de idade.

Na análise dos dados, observou-se, ainda, que as taxas de mortalidade brutas observadas possuem tendência de crescimento a partir dos 25 anos de idade e que há falta de informações para idades inferiores a 20 anos para o sexo masculino e inferiores a 30 anos para o sexo feminino, bem como para idades superiores a 90 anos, para ambos os sexos. Assim, serão estimadas, para todos os modelos, as taxas de mortalidade graduadas para idades entre 25 e 90 anos.

Nos modelos bayesianos propostos, no processo de graduação, as forças de mortalidade futuras para os intervalos de idade  $i$  ( $\theta_i^r$ ), sendo  $i = 1, \dots, 66$ , serão estimadas em função da distribuição preditiva do número de mortes observadas ( $d_i^r$ ), o mesmo ocorrendo com as probabilidades de morte futuras ( $q_{x+i-1}^r$ ), conforme realizado em Mendoza *et al.* (2001). A distribuição preditiva do número de mortes observadas é de fácil obtenção no contexto do MCMC, bastando replicar a função de verossimilhança.

A partir das forças de mortalidade futuras estimadas, obteremos, por meio do pacote estatístico em questão (WinBUGS), utilizando o processo de simplificação descrito em (3.1), distribuições condicionais completas para as probabilidades de morte futuras para cada idade, denotadas por  $q_x^r, q_{x+1}^r, \dots, q_{x+k-1}^r$ , para as idades  $x, x + 1, \dots, x + k - 1$ , com  $x = 25$  anos e  $k = 66$ , sendo estas probabilidades o objetivo final do processo de graduação.

Assim, podemos obter distribuições preditivas dos parâmetros de interesse proporcionais à  $d_i^r$ , considerando a quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x + i - 1$  ( $e_i$ ) constantes conhecidas, da seguinte forma:

$d_i^r \mid \theta_i \sim \text{Poisson}(e_i \cdot \theta_i)$ , defina:

$$\theta_i^r = \frac{d_i^r}{e_i} \text{ e}$$

$$q_{x+i-1}^r = 1 - \exp(-\theta_i^r), \text{ para } i = 1, \dots, 66 \text{ e } x = 25.$$

(4.1)

Ressaltamos que como o vetor  $\theta$  sofre o processo de graduação, automaticamente os vetores  $\theta^r$  e  $q^r$  são graduados.

Serão desenvolvidos estimadores bayesianos para os parâmetros de interesse. Os estimadores bayesianos mais comuns são a média, a moda e a mediana. Neste trabalho, consideramos como estimadores bayesianos das probabilidades de morte as médias dos valores amostrais preditos.

#### 4.1 Modelos não paramétricos (em forma livre)

Categorizamos os modelos como não paramétricos porque não há o ajuste das taxas brutas de mortalidade a uma função de sobrevivência baseada em uma lei de mortalidade.

Os modelos não paramétricos de graduação bayesiana propostos neste capítulo, conforme citado na seção 3.1, têm como referências os modelos descritos em Broffit (1988) e Carlin (1992).

Broffit (1988) para graduar as taxas brutas de mortalidade impôs a restrição  $\theta \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_k\}$  ao vetor de parâmetros  $\theta$ . Esta restrição à distribuição a priori assegura que os estimadores bayesianos também estarão restritos ao subconjunto  $R_I$ .

O autor assumiu que o número de mortes no intervalo de idade  $i$  ( $d_i$ ) tem distribuição Poisson( $e_i \cdot \theta_i$ ) e apresentou a seguinte função de verossimilhança,  $l(\theta | y_o)$ , considerando  $e_i$  constantes conhecidas:

$$l(\theta | y_o) \propto \prod_{i=1}^k \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \cdot \theta_i), \text{ onde } y_o = (d_1, \dots, d_k), \text{ sendo:}$$

$d_i$ : o número de mortes observadas na idade  $x + i - 1$  e

$e_i$ : a quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x + i - 1$ , para  $i = 1, \dots, k$  e  $x =$  primeira idade estudada.

É natural supor prioris Gamma para os parâmetros  $\theta_i$ 's, uma vez que estes só assumem valores reais positivos. Embora, prioris Gammas conjuguem com a verossimilhança Poisson, no modelo proposto esta facilidade perde-se pela restrição imposta pelo subconjunto  $R_I$  ao vetor de parâmetros  $\theta$ . Assim, segue a distribuição a priori definida em Broffit (1988):

$$\theta_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i),$$

onde ressaltamos que toda vez que a densidade de  $\theta_i$  tiver truncada pela presença da função I será interpretada como condicional à  $\theta_{i-1}$  e  $\theta_{i+1}$ .

Assim, devido às dificuldades computacionais, à época, Broffit (1988) abandonou esta classe de priori e adotou uma reparametrização do modelo. A reparametrização foi realizada considerando que os  $\theta_i$ 's são crescentes e seus incrementos positivos. Estes incrementos foram denotados pelo vetor k-dimensional  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$ . Assim,

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \phi_i, \quad i = 1, \dots, k \text{ e } \theta_0 = 0.$$

Com os incrementos devem ser positivos, o autor considerou-os independentes e distribuídos de acordo com um distribuição  $\text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i)$ , denotando a seguinte distribuição a posteriori:

$$p(\phi | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^k \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \theta_i) \prod_{i=1}^k \phi_i^{\alpha_i - 1} \exp(-\beta_i \phi_i) \propto \prod_{i=1}^k \theta_i^{d_i} \phi_i^{\alpha_i - 1} \cdot \exp(-b_i \cdot \phi_i),$$

$$\phi_i > 0, \quad i = 1, \dots, k, \text{ onde } \theta_i = \phi_1 + \dots + \phi_i \text{ e } b_i = \beta_i + e_i + \dots + e_k$$

Através da distribuição a posteriori apresentada e utilizando-se de integração numérica, Broffit (1988) obteve as modas a posteriori dos  $\phi_i$ 's e a partir destas os estimadores para as forças de mortalidade ( $\theta_i$ 's).

O modelo de Carlin (1992) apresentou-se como facilitador para obtenção da graduação bayesiana, pois com a utilização de MCMC tornou-se viável computacionalmente a especificação da distribuição a priori com a devida restrição para suavização das taxas brutas de mortalidade, evitando uma complexa integração numérica para estimação dos parâmetros de interesse.

Carlin (1992) utilizou no processo de graduação o mesmo modelo descrito em Broffit (1988), mas realizou pequenas alterações no subconjunto de restrições  $R_I$  e na distribuição a priori da força de mortalidade:

1. acrescentou um limite máximo para as forças de mortalidade no subconjunto  $R_I$ :  $\theta \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_k < B\}$ ; e
2. considerou os parâmetros  $\theta_i$ 's independentes e identicamente distribuídos com distribuição  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$  restrita ao subconjunto  $R_I$ , assumindo  $\alpha$  conhecido e

constante e  $\beta$  como sendo um hiperparâmetro com distribuição  $\text{Gamma}(a, b)$ , com  $a$  e  $b$  conhecidos. Foram utilizados os dados para obtenção dos valores de  $\alpha$ ,  $a$  e  $b$ .

Assim, distribuição a priori é dada por:

$$p(\theta | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^k \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{R_i}(\theta), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} I_{R_i}(\theta) = 1, \text{ se } \theta \in R_i; \\ I_{R_i}(\theta) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Após especificar a priori e a função de verossimilhança, Carlin (1992) apresentou a distribuição conjunta dos parâmetros e dos dados para o modelo de graduação bayesiana das taxas brutas de mortalidade:

$$p(y_o, \theta | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \theta_i) \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$$

A partir desta distribuição conjunta, a distribuição a posteriori condicional completa de  $\theta_i$ , considerando todos os demais parâmetros, foi descrita como se segue:

$$p(\theta_i | y_o, \alpha, \beta) \propto \text{Gamma}(\theta_i | \alpha_i^*, \beta_i^*) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i), i=1, \dots, k, \text{ onde}$$

$$\alpha_i^* = \alpha + d_i \text{ e } \beta_i^* = \beta + e_i.$$

Após a obtenção da distribuição a posteriori condicional, através de MCMC, Carlin (1992) obteve as médias a posteriori dos  $\theta_i$ 's e as utilizou como estimadores das forças de mortalidade nos intervalos de idade  $i$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

Após a apresentação dos modelos referenciais, ressaltamos que as principais contribuições dos modelos não paramétricos de graduação bayesiana propostos, a seguir, em relação aos modelos descritos em Broffit (1988) e Carlin (1992), são:

1. a estimação de taxas de mortalidade graduadas por meio da distribuição preditiva do número de óbitos, conforme demonstrado em (4.1); e
2. a utilização de um pacote computacional de fácil manuseio (WinBUGS).

A seguir, serão apresentados os três modelos não paramétricos propostos para graduação bayesiana das taxas brutas de mortalidade: no modelo 1, utilizamos o modelo descrito em Carlin (1992), porém sem considerar hiperparâmetro desconhecido, devido a uma restrição no pacote estatístico utilizado; no modelo 2, com o objetivo de não utilizar função indicadora, alteramos a distribuição a priori da força de mortalidade; e no

modelo 3, realizamos a mesma reparametrização utilizada por Broffit (1988), implementada no MCMC, evitando o uso da função indicadora.

#### 4.1.1 Modelo de Carlin modificado com $\beta$ fixo (modelo 1)

Para suavização das taxas brutas de mortalidade neste modelo impomos a restrição  $\theta \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_{66} < B\}$  ao vetor de parâmetros pertencente ao subconjunto  $\Omega = \{\theta; 0 \leq \theta_i < \infty, i = 1, \dots, 66\}$  de espaço euclidiano k-dimensional, sendo B o limite máximo para força de mortalidade no intervalo de tempo correspondente à idade de 90 anos. No modelo consideramos B igual a 1.

Utilizamos função de verossimilhança,  $l(\theta | y_o)$ , obtida por Broffit (1988), que corresponde a assumir que  $d_i | \theta_i$  tem uma distribuição Poisson  $(e_i \cdot \theta_i)$ , considerando  $e_i$  constantes conhecidas, temos então:

$$l(\theta | y_o) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \cdot \theta_i), \text{ onde } y_o = (d_1, \dots, d_{66}), \text{ sendo:}$$

$d_i$ : o número de mortes observadas na idade  $x + i - 1$  e

$e_i$ : a quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x + i - 1$ , para  $i = 1, \dots, 66$  e  $x = 25$ . (4.2)

Assumimos  $\theta_i$  independentes e identicamente distribuídos com distribuição Gamma( $\alpha, \beta$ ) não informativa e restrita ao subconjunto  $R_I$ , com  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,001$ . Não utilizamos hiperparâmetros desconhecidos, diferente do realizado por Carlin (1992), devido a uma limitação do pacote estatístico, pois, de acordo com o disposto em Spiegelhalter *et al.* (1996), a utilização da função indicadora determinando limites quando os hiperparâmetros são desconhecidos é uma construção inapropriada no WinBUGS.

Assim, a distribuição a priori é dada por:

$$p(\theta | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{R_I}(\theta), \text{ onde}$$

$$R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_{66} < 1\} \text{ e}$$

$$\begin{cases} I_{R_i}(\theta) = 1, \text{ se } \theta \in R_i; \\ I_{R_i}(\theta) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

A utilização da função indicadora faz com que seja obedecida a restrição imposta, pois o sistema somente considera os valores amostrados que pertençam aos intervalos determinados.

No modelo bayesiano, a distribuição conjunta dos parâmetros e dos dados é dada por:

$$p(y_o, \theta | \alpha, \beta) = p(y_o | \theta) \cdot p(\theta | \alpha, \beta) I_{R_i}(\theta), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} I_{R_i}(\theta) = 1, \text{ se } \theta \in R_i; \\ I_{R_i}(\theta) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Simplificando a expressão apresentada temos:

$$p(y_o, \theta | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \theta_i) \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$$

A distribuição a posteriori de  $\theta$  e a distribuição preditiva, são dadas, respectivamente, por:

$$p(\theta | y_o, \alpha, \beta) = \frac{p(y_o, \theta | \alpha, \beta)}{p(y_o | \alpha, \beta)} = \frac{p(y_o, \theta | \alpha, \beta)}{\int p(y_o, \theta | \alpha, \beta) d\theta} = \frac{p(y_o | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) I_{R_i}(\theta)}{\int p(y_o | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) I_{R_i}(\theta) d\theta}$$

$$p(y_r | y_o) = \int p(y_r | \theta) p(\theta | y_o) d\theta$$

Com a distribuição a posteriori condicional do parâmetro de interesse  $\theta_i$  sendo obtida por:

$$p(\theta_i | y_o, \alpha, \beta) = \frac{p(y_o | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)}{\int p(y_o | \theta) p(\theta | \alpha, \beta) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i) d\theta_i}$$

Assim, a distribuição a posterior condicional completa de  $\theta_i$ , considerando todos os demais parâmetros, como em Carlin (1992), é dada por:

$$p(\theta_i | y_o, \alpha, \beta) \propto \text{Gamma}(\theta_i | \alpha_i^*, \beta_i^*) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i), \quad i = 1, \dots, 66, \text{ onde}$$

$$\alpha_i^* = \alpha + d_i \text{ e } \beta_i^* = \beta + e_i.$$

Em resumo, o modelo bayesiano fica descrito por:

$d_i | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_i \theta_i)$ ,  $e_i$  constantes conhecidas e  $i = 1, \dots, 66$ ;  
 $\theta_i | \alpha, \beta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$ , com  $\theta_0 = 0$  e  $\theta_{67} = 1$ ;  
 sendo  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,001$ ;  
 onde a predição é realizada através de (4.1).

#### 4.1.2 Modelo utilizando a priori uniforme (modelo 2)

Para este modelo foi realizada uma alteração no modelo 1, visando a obtenção de um modelo que não utilize a função indicadora, mas que continue a respeitar a restrição imposta,  $\theta \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_{66} < 1\}$ .

No modelo não utilizamos truncamento na distribuição a priori, mas para que o parâmetro de interesse continue sendo crescente em função da idade dos indivíduos, optamos por uma distribuição a priori Uniforme, a saber:

$$\theta_i | \theta_{i-1}, \theta_{i+1} \sim \text{Uniforme}(\theta_{i-1}, \theta_{i+1}), \text{ com } \theta_0 = 0, \theta_{67} = 1 \text{ e } i = 1, \dots, 66.$$

$$p(\theta_i | \theta_{i-1}, \theta_{i+1}) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}, & \text{para } \theta_{i-1} \leq \theta_i \leq \theta_{i+1} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

, para  $i = 1, \dots, 66$ , sendo  $\theta_0 = 0$  e  $\theta_{67} = 1$ , com:

$$E(\theta_i | \theta_{i-1}, \theta_{i+1}) = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2}.$$

Dessa forma, a distribuição uniforme definida faz com que as taxas brutas de mortalidade sejam graduadas, pois  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{66}$ .

Temos então a seguinte distribuição conjunta dos parâmetros e dos dados, considerando a mesma função de verossimilhança apresentada em (4.2):

$$p(y_o, \theta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \theta_i) \prod_{i=1}^{66} \frac{1}{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}$$

Observamos que o processo de inferência não é analiticamente tratável, ou seja, não admite conjugação, pois, a distribuição a priori (Uniforme) não é conjugada com a função de verossimilhança (Poisson). No entanto, não há problemas na implementação

do modelo, pois estamos utilizando simulação estocástica via cadeia de Markov, particularmente o Amostrador de Gibbs, onde não é necessária a conjugação entre a priori e a verossimilhança.

Em resumo, o modelo bayesiano fica descrito por:

$$d_i | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_i \theta_i), e_i \text{ constantes conhecidas e } i = 1, \dots, 66;$$

$$\theta_i | \theta_{i-1}, \theta_{i+1} \sim \text{Uniforme}(\theta_{i-1}, \theta_{i+1}), \text{ com } \theta_0 = 0 \text{ e } \theta_{67} = 1;$$

onde a predição é realizada através de (4.1).

### 4.1.3 Modelo com reparametrização tipo Broffit (modelo 3)

Trata-se de uma reparametrização do modelo 1, evitando o uso da função indicadora, tendo como base a reparametrização realizada por Broffit (1988), mas implementada no MCMC, e utilizando a mesma restrição ao vetor de parâmetros  $\theta$  ( $\theta \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_{66}\}$ ) imposta por este autor.

Para que seja obedecida à restrição, como realizado no modelo 2, não será usada a função indicadora, mas a seguinte reparametrização:

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \phi_i, \text{ para } i=1, \dots, 66 \text{ e } \theta_0 = 0$$

Para que seja garantido a restrição de crescimento dos  $\theta_i$ 's ao modelo, consideramos  $\phi_i$  independentes e distribuídos de acordo com um distribuição Gamma( $\alpha_i, \beta_i$ ). Os parâmetros  $\phi_i$ 's são os incrementos positivos dos correspondentes  $\theta_i$ 's. Portanto, cada parâmetro  $\theta_i$  será formado pela soma do parâmetro anterior ( $\theta_{i-1}$ ) com um incremento positivo ( $\phi_i$ ) gerado por meio da distribuição Gamma. Com isso, o pacote estatístico utilizado irá obter distribuições condicionais completas para as forças de mortalidade.

Temos então a seguinte distribuição conjunta (Broffit, 1998), considerando a mesma função de verossimilhança apresentada em (4.2):

$$p(y_o, \phi | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_i} \exp(-e_i \theta_i) \prod_{i=1}^{66} \phi_i^{\alpha_i-1} \exp(-\beta_i \phi_i) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_i} \phi_i^{\alpha_i-1} \cdot \exp(-b_i \cdot \phi_i),$$

$$\phi_i > 0, i = 1, \dots, 66, \text{ onde } \theta_i = \phi_1 + \dots + \phi_i \text{ e } b_i = \beta_i + e_i + \dots + e_{66}.$$

Para evitar problemas na implementação do modelo, devemos considerar  $\alpha_i > 1$ , para que a moda a posteriori de  $\phi_i$  não seja inferior a zero, devido a característica da distribuição Gamma, impossibilitando assim a geração de amostras no MCMC. Esse problema ocorre quando os incrementos das taxa brutas correspondentes aos  $\phi_i$ 's são negativos. A fim de corrigir este problema fixamos o valor  $\alpha_i$  igual ao próximo número inteiro positivo, ou seja,  $\alpha_i = 2$ , para todo  $i$ .

Quanto ao hiperparâmetro  $\beta_i$ , consideramos estes independente e identicamente distribuídos por uma distribuição Gamma não informativa:  $\beta_i \sim \text{Gamma}(0,1, 0,1)$ .

Em resumo, o modelo bayesiano reparametrizado fica descrito por:

$$\begin{aligned} d_i | \theta_i &\sim \text{Poisson}(e_i, \theta_i), \text{ e } e_i \text{ constantes conhecidas e } i = 1, \dots, 66; \\ \phi_i | \alpha_i, \beta_i &\sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i), \text{ sendo } \alpha_i = 2, \forall i; \\ \beta_i | c, d &\sim \text{Gamma}(c, d), \text{ sendo } c = 0,1 \text{ e } d = 0,1; \\ \theta_i &= \theta_{i-1} + \phi_i, \text{ sendo } \theta_0 = 0; \\ &\text{onde a predição é realizada através de (4.1).} \end{aligned}$$

## 4.2 Modelos paramétricos

Nestes modelos, as taxas brutas de mortalidade são graduadas por meio da adequação da força de mortalidade a uma função matemática. Os modelos são calcados em modelos lineares generalizados bayesianos com base no modelo clássico não preditivo descrito em Haberman e Renshaw (1996).

Como nos modelos não paramétricos apresentados, Haberman e Renshaw (1996) consideraram o número de mortes observadas por idade modelado como sendo Poisson distribuído e a quantidade central de expostos ao risco observados como sendo constantes conhecidas. Então, seja, mais uma vez,  $d_i$  o número de mortes observadas na idade  $x + i - 1$  e  $e_i$  a quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x + i - 1$ , para  $i = 1, \dots, 66$  e  $x = 25$ .

Assim,  $d_i | \theta_i$  são independentes e distribuídos de acordo com uma distribuição Poisson( $e_i \cdot \theta_i$ ). Temos, então:

$$E(d_i | \theta_i) = \lambda_i = e_i \cdot \theta_i$$

Como a função de ligação canônica ( $\eta_i$ ) da distribuição Poisson é dada por  $\log(\lambda_i)$ , segue a estrutura do modelo linear generalizado apresentada por Haberman e Renshaw (1996):

$$\eta_i = \log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log(\theta_i)$$

A partir da estruturação do modelo, os autores definiram preditores lineares para a força de mortalidade, chamando-os de Gompertz-Makeham preditores, onde dois destes preditores correspondem às famosas leis de mortalidade: de Gompertz e de Makeham.

As principais contribuições dos modelos paramétricos de graduação bayesiana propostos, a seguir, em relação ao modelo clássico descrito em Haberman e Renshaw (1996) são:

1. a utilização de conhecimentos iniciais (distribuições a priori) para os parâmetros a serem estimados;
2. a estimação de taxas de mortalidade graduadas por meio da distribuição preditiva do número de óbitos, conforme demonstrado em (4.1); e
3. a utilização de simulação estocástica via cadeias de Markov - MCMC, implementada através de um pacote computacional de simples utilização (WinBUGS).

Para cada um dos três modelos paramétricos a serem apresentados, utilizamos como preditores lineares das forças de mortalidade diferentes funções matemáticas.

Devemos considerar que em modelos lineares generalizados bayesianos a distribuição a priori não é conjugada com a função de verossimilhança, conforme disposto em Gamerman (1996), portanto mais uma vez não é possível realizar a inferência de forma exata. Contudo, esta afirmativa não acarreta problemas, pois, como já explicado, com a utilização do Amostrador de Gibbs não é necessária a conjugação entre a priori e a função de verossimilhança.

#### 4.2.1 Modelo com força de mortalidade tipo Gompertz (modelo 4)

Neste modelo paramétrico a força de mortalidade será ajustada considerando a famosa lei de mortalidade desenvolvida por Gompertz, em 1825. Esta lei prevê que a força de mortalidade cresce em progressão geométrica, conforme descrito em Jordan (1991), da seguinte forma:

$$\mu_x = \beta \cdot \delta^x, \text{ sujeita as seguintes restrições:}$$

- $\beta > 0$ ;
- $\delta \geq 1$ ; e
- $x \geq 0$ , sendo  $x$  a idade em anos.

Como estamos considerando  $\mu_{(y)} = \theta_i, x+i-1 \leq y \leq x+i$ , para  $i = 1, \dots, 66$  e  $x = 25$ , temos:

$$\theta_i = \beta \cdot \delta^{Z_i}, \text{ sendo:}$$

$Z_i = x + i - 1$  ( $Z_i = 25, \dots, 90$ ), que representam as idades em estudo.

Logo, estrutura do modelo passa a ser dada por:

$$\eta_i = \log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log(\beta) + Z_i \cdot \log(\delta)$$

O modelo possui dois parâmetros a serem estimados:  $\beta$  e  $\delta$ , uma variável explicativa:  $Z_i$  e seu intercepto é dado por  $\log(e_i) + \log(\beta)$ .

Para realizar a inferência bayesiana, deve-se determinar as distribuições a priori para os parâmetros  $\beta$  e  $\delta$ . Como descrito em Gamerman (1996), uma extensão natural ao caso onde a regressão é normal é determinar prioris normalmente distribuídas, observando as restrições impostas na Lei de Gompertz. No modelo, optamos por utilizar prioris não informativas, para que seja levado em consideração apenas o peso dos dados.

Em resumo, o modelo proposto fica descrito por:

$$\begin{aligned} d_i | \theta_i &\sim \text{Poisson}(\lambda_i), \lambda_i = e_i \cdot \theta_i, e_i \text{ constantes conhecidas e } i = 1, \dots, 66; \\ \log(\lambda_i) &= \log(e_i) + \log(\beta) + Z_i \cdot \log(\delta); \\ \theta_i &= \beta \cdot \delta^{Z_i}; \end{aligned}$$

$$\beta \sim \text{Normal} ( 0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\beta) ;$$

$$\delta \sim \text{Normal} ( 0, 0,0001) I_{(1,\infty)}(\delta) ;$$

onde a predição é realizada através de (4.1).

#### 4.2.2 Modelo com força de mortalidade tipo Makeham (modelo 5)

Este modelo difere-se do modelo anterior apenas pela alteração da lei de mortalidade utilizada para ajuste da força de mortalidade.

Gompertz afirmou que os óbitos humanos são provenientes de duas causas: naturais e acidentais (Jordan, 1991). Contudo, em sua lei considerou apenas as causas naturais, ou seja, o envelhecimento. Makeham, em 1860, agregou à Lei de Gompertz a segunda parcela de causas de morte relativa às mortes acidentais, acrescentando mais um parâmetro a ser estimado ( $\alpha$ ), que visa estimar a parcela da força de mortalidade que independe da idade. Assim, Makeham definiu a força de mortalidade da seguinte forma:

$$\mu_x = \alpha + \beta \cdot \delta^x, \text{ sujeita as seguintes restrições:}$$

- $\alpha \geq 0$  ;
- $\beta > 0$  ;
- $\delta \geq 1$ ; e
- $x \geq 0$ , sendo x a idade em anos.

Temos, então:

$$\theta_i = \alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i}, \text{ sendo:}$$

$Z_i = x + i - 1$  ( $Z_i = 25, \dots, 90$ ), para  $x = 25$  e  $i = 1, \dots, 66$ , que representam as idades em estudo, conforme disposto no modelo anterior.

(4.3)

A estrutura do modelo passa a ser dada por:

$$\eta_i = \log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log(\alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i})$$

Podemos verificar que houve um aumento no número de parâmetros a serem estimados:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , permanecendo ainda com uma variável explicativa:  $Z_i$ .

Para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , determinamos distribuições a priori modeladas de acordo com distribuições Normais não informativas, observando as restrições impostas pela Lei de Makeham.

Assim, em resumo, o modelo bayesiano fica descrito por:

$$d_i | \theta_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), \lambda_i = e_i \cdot \theta_i, e_i \text{ constantes conhecidas e } i = 1, \dots, 66;$$

$$\log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log(\alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i});$$

$$\theta_i = \alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i};$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0, \infty)}(\alpha);$$

$$\beta \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0, \infty)}(\beta);$$

$$\delta \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(1, \infty)}(\delta);$$

onde a predição é realizada através de (4.1).

#### 4.2.3 Modelo com força de mortalidade alternativa (modelo 6)

Neste modelo, consideraremos a função matemática utilizada em Beltrão e Sugahara (2003) para graduação das taxas brutas.

Beltrão e Sugahara (2003) optaram por considerar o número de óbitos por idade distribuídos através de uma distribuição Binomial - Binomial( $e_x$ ,  $q_x$ ), sendo  $x$  a idade em anos, e ajustaram as taxas brutas de mortalidade a partir da seguinte função:

$$q_x = \alpha + \frac{\beta \delta^x}{(1 + \kappa \beta \delta^x)}$$

Os autores afirmam que utilizaram esta formulação, pois não dispunham de informações para idade mais jovens e para os mais idosos, pois a formulação completa seria:

$$q_x = \omega^{(x+\psi)^\nu} + \alpha \exp(-\rho(\ln x - \ln \zeta)^2) + \frac{\beta \delta^x}{(1 + \kappa \beta \delta^x)}, \text{ onde:}$$

- o 1º termo descreve a mortalidade na primeira infância;
- o 2º termo descreve a mortalidade por causas externas; e
- o último termo descreve a mortalidade por envelhecimento.

Ademais, informam, ainda, que consideraram o 2º termo constante por falta de informações para idades mais jovens.

Para que seja utilizada nesse modelo a função matemática usada por Beltrão e Sugahara (2003) temos que realizar ajustes na referida função, pois estamos trabalhando com quantidade central de expostos ao risco e em consequência utilizando o número de mortes modelado como sendo Poisson distribuído.

Com base na relação entre a força de mortalidade e a probabilidade de morte descrita em (3.1), iremos, neste modelo encontrar uma função para graduação das taxas brutas em relação à força de mortalidade, a partir da seguinte transformação:

$$\begin{aligned}
 q_x &= \alpha + \frac{\beta\delta^x}{(1 + \kappa\beta\delta^x)}, \quad x = 25, \dots, 90 \\
 q_{x+i-1} &= 1 - \exp(-\theta_i), \quad \text{para } x = 25 \text{ e } i = 1, \dots, 66. \\
 Z_i &= x + i - 1, \quad Z_i = 25, \dots, 90. \\
 \theta_i &= -\log\left(1 - \left(\alpha + \frac{\beta\delta^{Z_i}}{(1 + \kappa\beta\delta^{Z_i})}\right)\right)
 \end{aligned}$$

A estrutura do modelo linear generalizado passa a ser dada por:

$$\eta_i = \log(\lambda_i) = \log(e_i) + \log\left(-\log\left(1 - \left(\alpha + \frac{\beta\delta^{Z_i}}{(1 + \kappa\beta\delta^{Z_i})}\right)\right)\right)$$

Podemos verificar que houve um aumento no número de parâmetros, em relação ao modelo anterior, a serem estimados:  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , permanecendo ainda com apenas uma variável explicativa:  $Z_i$ .

Como nos demais modelos paramétricos, determinamos para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$  e  $\delta$  prioris não informativas normalmente distribuídas, observando as restrições a serem impostas:

Em resumo, o modelo bayesiano proposto fica descrito por:

$$\begin{aligned}
 d_i | \theta_i &\sim \text{Poisson}(\lambda_i), \quad \lambda_i = e_i \cdot \theta_i, \quad e_i \text{ constantes conhecidas e } i = 1, \dots, 66; \\
 \log(\lambda_i) &= \log(e_i) + \log\left(-\log\left(1 - \left(\alpha + \frac{\beta\delta^{Z_i}}{(1 + \kappa\beta\delta^{Z_i})}\right)\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\theta_i = -\log\left(1 - \left(\alpha + \frac{\beta\delta^{Z_i}}{1 + \kappa\beta\delta^{Z_i}}\right)\right)$$

$$\alpha \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\alpha);$$

$$\beta \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\beta);$$

$$\delta \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(1,\infty)}(\delta);$$

$$\kappa \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(1,\infty)}(\kappa);$$

onde a predição é realizada através de (4.1).

### 4.3 Implementação e análise de convergência

Os modelos de graduação propostos são implementados no WinBUGS 1.4 para cada ano (1998 a 2001) e sexo. A implementação computacional dos modelos é bastante simples e bastam poucos minutos para rodá-los em um PC com 1.8GHz e 512MB de memória RAM, com exceção do modelo 3 que é mais lenta que nos demais modelos, ficando seu tempo de implementação em torno de três horas. Os programas utilizados para implementar os modelos de graduação bayesiana estão disponíveis no Anexo IV.

Para implementação do Amostrador de Gibbs, são simuladas três cadeias em paralelo com valores iniciais distintos, com objetivo de evitar que as amostras geradas concentrem-se em regiões em torno de uma moda local, no caso de multimodalidade da posteriori, conforme descrito em Gamerman (1996).

É importante frisar que nos modelos 1 e 2 os valores iniciais dos parâmetros  $\theta_i$ 's,  $(\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_{66}^{(0)})$ , devem ser crescentes em função do intervalo de tempo  $i$ , para que os modelos sejam implementados. Isto deve-se ao intervalo imposto à função indicadora, no modelo 1, e aos parâmetros da distribuição uniforme, no modelo 2. Por este motivo, foram considerados como valores iniciais dos  $\theta_i$ 's as forças de mortalidade das seguintes tábuas biométricas: AT-2000 *Basic Male (Annuity Table-2000 básica, para o sexo masculino)*, AT-83 *Male (Annuity Table-1983, para o sexo masculino)* e AT-49 *Male (Annuity Table-1949, para o sexo masculino)*,

respectivamente para cada cadeia simulada, calculadas de acordo com a relação entre a força de mortalidade e a probabilidade de morte apresentada em (3.1).

Vale ressaltar que para algumas idades em determinados anos, relacionadas na Tabela 4.1, não há registros de mortes. Estas são tratadas como observações preditas e portanto estimadas no processo do MCMC, por meio da distribuição preditiva do número de mortes dado o número de mortes das idades informadas, isto é:

$$p(y^{NA} | y_o) = \int p(y^{NA} | \theta, y_o) p(\theta | y_o) d\theta$$

Tabela 4.1: Idades em que não foram informados óbitos, nos anos de 1998 a 2001, para ambos os sexos.

ano	sexo	
	masculino	feminino
1998	-	89
1999	-	-
2000	88	76, 85, 88 e 90
2001	-	26, 28 e 88

A verificação da convergência é importante para sabermos a partir de que iteração do Amostrador de Gibbs os parâmetros de interesse independem dos valores iniciais fixados. Após a determinação dessa iteração, são descartadas as  $n$  iterações anteriores à convergência, esta etapa é conhecida como período de aquecimento das cadeias (*burn-in*). Para efeito de análise dos modelos são consideradas as  $n$  iterações posteriores ao aquecimento das cadeias, como sugerido em Gamerman (1996), então, como estamos considerando três cadeias em paralelo, serão geradas para cada parâmetro desconhecido amostras de tamanho  $3n$ .

Para o diagnóstico da convergência dos parâmetros de interesse, nos modelos propostos, são utilizadas quatro técnicas, como aplicado por Migon e Moura (2002). Três técnicas informais de análise gráfica (densidade, função de autocorrelação e “traces”) e a estatística de Gelman-Rubin modificada por Brooks e Gelman (1998).

A análise do gráfico da distribuição de densidade tem como objetivo verificar se a densidade da distribuição a posteriori possui a simetria desejada, observando, por exemplo, se há mais de uma moda na distribuição. Para essa análise, o pacote WinBUGS 1.4 disponibiliza para cada parâmetro de interesse monitorado um gráfico da

densidade a posteriori kernel suavizada, a qual corresponde a uma suavização do histograma através do método de kernel.

O gráfico da função de autocorrelação é utilizado para verificar a independência entre as iterações. Para cada parâmetro de interesse um gráfico da função de autocorrelação considerando um lag de tamanho igual a 50 é disponibilizado pelo pacote.

Os valores gerados ao longo das iterações para cada cadeia, simultaneamente, são plotados em seqüência (“traces”). Para verificação da convergência da simulação estocástica devemos analisar se as cadeias estão se misturando no gráfico, não devendo haver comportamentos distintos entre as cadeias após a convergência.

A estatística de Gelman-Rubin modificada por Brooks e Gelman (1998) é implementada graficamente no pacote estatístico utilizado. Para explicar este método devemos entender que o pacote disponibiliza estatísticas para os parâmetros de interesse considerando as três cadeias juntas ou separadamente, quando haverá três resultados distintos. Então, temos:

1.  $R_p$  – intervalo empírico de 80% para o parâmetro de interesse considerando as três cadeias em conjunto;
2.  $R_w$  – média nas três cadeias dos intervalos empíricos de 80% para o parâmetro de interesse;
3.  $R = \frac{R_p}{R_w}$ .

O WinBUGS gera gráficos para cada parâmetro monitorado, onde os valores de  $R_p$  e  $R_w$  são normalizados e são representados por linhas de cor verde e azul, respectivamente, já  $R$  é representado pela cor vermelha.

Com os gráficos da estatística de Gelman-Rubin podemos verificar a partir de que iteração a simulação MCMC converge, isto se dará quando os valores de  $R_p$  e  $R_w$ , para os parâmetros monitorados, se estabilizam e o valor  $R$  converge para 1.

Geramos para cada parâmetro desconhecido uma amostra de tamanho 120.000, através de três cadeias em paralelo, das quais as primeiras 60.000 são descartadas, com o objetivo de assegurarmos a convergência dos modelos propostos.

Com objetivo de exemplificar a análise de convergência realizada nesta tese, os seguintes gráficos de convergência do parâmetro  $q_{40}^r$  (probabilidade de morte estimada

para a idade de 40 anos), para o sexo masculino, no ano de 2001, relativo ao modelo 1, podem ser observados no Anexo V: “traces”, onde é verificado que não há comportamentos distintos entre as cadeias; da distribuição de densidade, onde é observado a simetria da distribuição; da função de autocorrelação, quando podemos observar a independência entre as iterações e o da estatística de Gelman-Rubin, onde é verificado a convergência a partir do período de aquecimentos das cadeias.

Após a implementação dos modelos propostos e o diagnóstico de convergência dos mesmos, a seguir comparamos os modelos e analisamos os resultados gerados.

#### 4.4 Comparação entre os modelos e análise dos resultados

A determinação do modelo que mais se adequa aos dados disponíveis é fundamental na estatística e como citado em Gelfand e Ghosh (1998) “é uma atividade que está se tornando cada vez mais importante com o avanço computacional que permite o ajustamento de modelos complexos”.

Para escolha do modelo de graduação bayesiana proposto mais adequado adotamos três métodos de seleção: o EPD (*Expected Predictive Deviance*), critério proposto por Gelfand e Ghosh (1998); o DIC (*Deviance Information Criterion*), desenvolvido por Spiegelhalter *et al.* (2002) e o fator de Bayes estimado através do logaritmo da verossimilhança preditiva.

Gelfand e Ghosh (1998) propuseram um critério baseado na distribuição preditiva dos dados e em uma função de perda determinada, onde o objetivo é encontrar, simultaneamente, um bom ajuste do modelo e uma boa predição dos dados replicados com a mesma estrutura dos dados observados.

Seja uma coleção de modelos propostos  $m$ ,  $m = 1, \dots, 6$ , considere  $y_o$  o vetor de dados observados,  $y_r$  o vetor de dados replicados a partir da mesma distribuição de probabilidade utilizada nos dados originais, obtido como uma amostra da distribuição preditiva  $p(y_r | y_o, m)$ , e  $a_m$  o vetor de ação, dependente do modelo, sendo uma tentativa estimada de conciliar  $y_o$  e  $y_r$ . Podemos definir  $L(y_r, a_m | y_o)$  como a perda por supor  $a_m$  quando  $y_r$  é obtido dado  $y_o$ .

O critério proposto por Gelfand e Ghosh (1998) consiste em definir um peso ( $k$ ) para a função de perda de uma ação  $a_m$  considerando o vetor  $y_o$  e para função de perda de uma ação  $a_m$  considerando o vetor  $y_r$ :

$$L(y_r, a_m | y_o) = L(y_r, a_m) + k.L(y_o, a_m) \quad (k \geq 0)$$

Nos modelos propostos consideramos o vetor  $y_o = \{d_i, i = 1, \dots, 66\}$  e  $y_r = \{d_i^r, i = 1, \dots, 66\}$ .

O método pode ser desenvolvido para várias funções de perda, nesse trabalho utilizaremos a função de perda quadrática. Com isso, escolheremos o modelo que minimiza a média dos erros quadráticos do total de número de mortes para cada classe de idade  $i$ , temos então para cada classe de idade:

$$L(d_i^r, a_m | d_i) = (d_i^r - a_m)^2 + k.(d_i - a_m)^2$$

Os autores do citado artigo demonstraram que a minimização da esperança da função de perda apresentada é dada por:

$$\min_{a_m} E(L(d_i^r, a_m | d_i)) = \sigma_i^{2(m)} + \left(\frac{k}{k+1}\right).(\mu_i^{(m)} - d_i)^2, \text{ onde}$$

$$\sigma_i^{2(m)} = \text{Var}(d_i^r | d_i, m) \text{ e } \mu_i^{(m)} = E(d_i^r | d_i, m).$$

Considerando todas as classes de idade, temos:

$$D(k, m) = \sum_{i=1}^{66} \min_{a_m} \{ E(L(d_i^r, a_m | d_i)) \} = \sum_{i=1}^{66} \sigma_i^{2(m)} + \left(\frac{k}{k+1}\right) \sum_{i=1}^{66} (\mu_i^{(m)} - d_i)^2, \text{ sendo}$$

$$G(m) = \sum_{i=1}^{66} (\mu_i^{(m)} - d_i)^2 \text{ e } P(m) = \sum_{i=1}^{66} \sigma_i^{2(m)}$$

Podemos considerar  $G(m)$  (soma dos quadrados dos resíduos) como uma tradicional medida de bondade de ajuste de um modelo e  $P(m)$  (soma das variâncias preditas) como um termo de penalidade.

Vamos analisar os modelos independentes de  $k$ , bastando para isso considerar  $k$  tendendo a infinito. Logo, temos:

$$D(m) = G(m) + P(m), \text{ para } k \rightarrow \infty.$$

Na comparação entre os modelos iremos considerar como modelo mais adequado o que tiver o menor valor de  $D(m)$ .

Como citado em Gelfand e Ghosh (1998), para modelos subjustrados (com menos parâmetros que o necessário) ou superajustrados (mais parâmetros que o

necessário) as variâncias preditivas serão grandes, logo teremos um alto valor para  $P(m)$ . Quanto à  $G(m)$ , à medida que os modelos tornam-se mais complexos seu valor decresce, pois os resíduos tornam-se pequenos. No entanto, como já citado, os valores de  $P(m)$  tendem a crescer, aplicando-se uma penalidade aos modelos mais complexos. Portanto, a análise dos modelos mais ajustados aos dados deve ser realizada de forma cuidadosa, optando-se por modelos parcimoniosos, incluindo somente a quantidade de parâmetro necessária para um bom ajuste.

O EPD é facilmente implementado, pois o termo  $G(m)$  é implementado diretamente no WinBUGS e o termo  $P(m)$  é calculado fora do sistema somando as variâncias preditivas obtidas na saída do WinBUGS.

Conforme citado em Spiegelhalter *et al.* (2002), o critério de Gelfand e Ghosh (1998) descreve uma decisão teórica de escolha de modelo baseado na perda esperada dos dados replicados; já o método DIC, proposto no referido artigo, é uma aproximação mais informal, com o objetivo de identificar o modelo que melhor explica os dados observados, mas com o mesmo objetivo de minimizar as incertezas sobre os dados replicadas. O DIC é uma generalização bayesiana do conhecido método AIC - Akaike Information Criterion.

O DIC pode ser considerado como uma medida bayesiana de ajuste dos dados, penalizado por um termo adicional de complexidade, sendo utilizado para comparar modelos hierárquicos complexos nos quais o número de parâmetros não é bem definido, podendo algumas vezes até mesmo ultrapassar o número de observações.

O DIC é composto de dois termos: o primeiro termo é uma medida de ajustamento do modelo -  $\bar{D}$  e o segundo termo mede o número efetivo de parâmetros -  $pD$ , então:

$$DIC = \bar{D} + pD$$

Para a medida bayesiana de ajustamento ou adequação de modelos, os autores utilizaram a média a posteriori da função desvio:

$$\bar{D} = E_{\theta|y_o} [D(\theta)] = E_{\theta|y_o} [-2 \cdot \ln p(y_o | \theta)]$$

Esse termo é calcado na idéia de que quanto maior a verossimilhança melhor o ajustamento aos dados, então, quando calculamos menos duas vezes o logaritmo da

verossimilhança, temos que considerar que quanto menor o valor de  $\bar{D}$ , mais ajustado encontra-se o modelo.

Já o pD é obtido pela diferença entre a média a posteriori da função desvio e a função desvio da média a posteriori dos parâmetros de interesse, este cálculo nos dá uma eficiente e direta aproximação bayesiana para definir o número efetivo de parâmetros e com isso obter uma medida de complexidade para os modelos propostos.

$$pD = \bar{D} - D(\bar{\theta}) = E_{\theta|y_o} [D(\theta)] - D(E_{\theta|y_o} [\theta]) =$$

$$pD = E_{\theta|y_o} [-2 \cdot \ln p(y_o | \theta)] + 2 \cdot \ln p(y_o | \bar{\theta})$$

Vale ressaltar, conforme afirmado em Spiegelhalter *et al.* (2002) e (2003), que pD é sempre positivo para uma função de verossimilhança log-côncava, sendo negativos em duas situações:

- quando a função de verossimilhança é não log-côncava, onde existe um grande conflito entre as prioris e os dados; e
- quando a distribuição a posteriori para um parâmetro é bimodal simétrica, neste caso a média a posteriori é um pobre estimador.

Concluimos que o DIC pode ser interpretado como uma clássica medida de ajuste ou adequação mais uma medida de complexidade. Dessa forma, para análise dos modelos propostos, consideraremos o modelo com menor valor de DIC, simultaneamente, como o modelo com o melhor ajuste aos dados e a melhor predição dos dados replicados, sendo estes, mais uma vez, com a mesma estrutura dos dados observados, conforme disposto em Spiegelhalter *et al.* (2003).

O DIC é diretamente calculado no WinBUGS 1.4, contudo este deve ser implementado somente quando for assegurada a convergência do modelo.

Quanto ao fator de Bayes, este é um método bastante difundido entre os estatísticos bayesianos e fornece uma medida relativa de análise de um modelo, sendo muito utilizado quando a escolha do modelo é vista como um teste de hipótese.

O fator de Bayes é baseado na razão entre as verossimilhanças preditivas, partindo do conceito do ajuste da função de verossimilhança aos dados, como disposto em Gamerman (1996), pois se a verossimilhança de um dos modelos propostos é muito baixa, o modelo não está adequado.

Vamos considerar dois modelos:  $M_1$  e  $M_2$ , com probabilidades a priori  $p(M_1)$  e  $p(M_2)$ , respectivamente, sendo  $p(M_2) = 1 - p(M_1)$ . Seja  $y_o$  as observações dadas, temos então, as seguintes funções de densidade:  $p(y_o | M_1)$  e  $p(y_o | M_2)$ , estas são denominadas verossimilhanças preditivas, pois são geradas a partir da distribuição dos dados do respectivo modelo.

Dadas as probabilidades a priori, os dados produzem as probabilidades a posteriori  $p(M_1 | y_o)$  e  $p(M_2 | y_o) = 1 - p(M_1 | y_o)$ , estas probabilidades a posteriori são obtidas por meio do Teorema de Bayes:

$$p(M_m | y_o) = \frac{p(y_o | M_m)p(M_m)}{p(y_o | M_1)p(M_1) + p(y_o | M_2)p(M_2)}, \quad (m=1, 2), \text{ então}$$

$$\frac{p(M_1 | y_o)}{p(M_2 | y_o)} = \frac{p(y_o | M_1)p(M_1)}{p(y_o | M_2)p(M_2)}$$

Conforme mencionado, a razão entre as verossimilhanças preditivas é denominada fator de Bayes e fornece a razão de chances a posteriori a menos da razão de chance a priori:

$$B_{12} = \frac{p(y_o | M_1)}{p(y_o | M_2)}$$

A verossimilhança preditiva de cada modelo  $M_m$ , é obtida por integração:

$$p(y_o | M_m) = \int p(y_o | \theta_m, M_m) \cdot p(\theta_m | M_m) d\theta_m, \text{ onde}$$

$\theta_m$ : é o vetor de parâmetros do modelo  $M_m$ ;

$p(\theta_m | M_m)$ : é a densidade a priori; e

$p(y_o | \theta_m, M_m)$ : é a função de verossimilhança.

Como descrito em Kass e Raftery (1995), “o fator de Bayes é um resumo das evidências geradas pelos dados em favor de uma teoria científica, representada por um modelo estatístico, em oposição à outra“. Em função disto, no citado artigo, foi apresentado uma medida de comparação entre dois modelos através do dobro do logaritmo natural do fator de Bayes:

<b>2.log(B<sub>12</sub>)</b>	<b>B<sub>12</sub></b>	<b>Evidências contra o Modelo 2</b>
0 a 2	1 a 3	Não há grandes evidências
2 a 5	3 a 12	Positiva

5 a 10	12 a 150	Forte
>10	>150	Decisiva

Podemos utilizar o logaritmo da verossimilhança preditiva para assessorar a performance do modelo. Nos modelos de graduação propostos, as observações  $y_o$  são formadas por subconjuntos de observações para cada classe  $i$  de intervalo de idade,  $i = 1, \dots, 66$ , então,  $y_o = \{d_1, d_2, \dots, d_{66}\}$ , havendo uma distribuição preditiva  $p(d_i | d_{-i})$  para cada classe  $i$ . Para assessorar a performance dos modelos propostos utilizaremos a regra logarítmica do escore,  $\log p(d_i | d_{-i})$ , tal qual apresentado em Kass e Raftery (1995). O escore total da verossimilhança preditiva (LS) é dado por:

$$LS = \sum_{i=1}^{66} \log p(d_i | d_{-i})$$

Particularmente, para um modelo  $M_m$ , temos:

$$LS_m = \log p(y_o | M_m) = \sum_{i=1}^{66} \log p(d_i | d_{-i}, M_m)$$

A partir do escore total de cada modelo ( $LS_m$ ), podemos obter o logaritmo natural do fator de Bayes:

$$\log B_{12} = LS_1 - LS_2, \text{ logaritmo natural do fator de Bayes para os modelos 1 e 2.}$$

Um grande problema para obtenção do fator de Bayes é o cálculo da verossimilhança preditiva para cada classe de idade  $i$  -  $p(d_i | d_{-i}, M_m)$ , pois a integração para sua obtenção é complexa, devendo ser utilizado métodos aproximados.

Retirando a notação de dependência do modelo, podemos representar a verossimilhança preditiva para cada classe de idade  $i$  como:

$$p(d_i | d_{-i}) = \int p(d_i | \theta_i) \cdot p(\theta_i) d\theta_i, \text{ para } i = 1, \dots, 66.$$

Uma estimativa simples da verossimilhança preditiva é o estimador de Monte Carlo simples, que consiste na média das funções de verossimilhança dos valores amostrais dos parâmetros:

$$\hat{p}(d_i | d_{-i}) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k p(d_i | \theta_i^{(k)}), \text{ onde } \{\theta_i^{(k)} : n = 1, \dots, k\}$$

Este método de simulação não é eficiente, pois a estimativa é dominada por poucos valores amostrados altos, gerando uma grande variância, isto ocorre porque os valores de  $\theta_i^{(k)}$  são gerados em regiões de baixa verossimilhança.

Podemos melhorar a estimativa realizando uma amostragem por importância, que consiste em gerar uma amostra  $\{\theta_i^{(k)} : n=1, \dots, k\}$  de densidade  $p^*(\theta_i)$ , então a estimativa da verossimilhança preditiva é dada por:

$$\hat{p}(d_i | d_{-i}) = \frac{\sum_{n=1}^k w_n p(d_i | \theta_i^{(k)})}{\sum_{n=1}^k w_n}, \text{ onde:}$$

$$w_n = \frac{p(\theta_i^{(k)})}{p^*(\theta_i^{(k)})} e$$

$p^*(\theta_i)$  é conhecida como função de amostragem por importância.

Nesta tese utilizaremos o Amostrador de Gibbs para gerar uma amostra de  $\{\theta_i^{(k)} : n=1, \dots, k\}$  aproximadamente obtida da seguinte distribuição a posteriori:

$$p^*(\theta_i) = p(\theta_i | d_i) = \frac{p(d_i | \theta_i) \cdot p(\theta_i)}{p(d_i | d_{-i})}.$$

Substituindo na equação anterior, obtemos a média harmônica dos valores da verossimilhança, conforme sugerida por Newton e Raftery (1994):

$$\hat{p}(d_i | d_{-i}) = \left\{ \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k p(d_i | \theta_i^{(k)})^{-1} \right\}^{-1}$$

Existem dois problemas com este estimador da verossimilhança: o primeiro é devido à divergência da variância amostral do inverso da verossimilhança e o outro é a chance de obtenção de pontos com baixa verossimilhança, podendo causar impacto considerável na expressão final, contudo, conforme afirmado por Kass e Raftery (1995), este estimador é suficientemente acurado para interpretação na escala logarítmica, anteriormente apresentada.

Através da estimativa descrita e da regra logarítmica do score, o método do fator de Bayes é facilmente implementado, bastando apenas:

1. implementar, para cada modelo, no WinBUGS, o cálculo do inverso da função de verossimilhança para cada classe  $i$ : `ilike i;`

2. calcular, fora do sistema, o inverso da média a posteriori de  $i$ , obtida na saída do WinBUGS:  $\hat{p}(d_i | d_{-i})$ ;

3. calcular a soma dos logaritmos de  $\hat{p}(d_i | d_{-i})$  para obter o escore total da verossimilhança preditiva  $LS = \sum_{i=1}^{66} \log p(d_i | d_{-i})$ ; e

4. após a obtenção do escore total da verossimilhança preditiva, para cada modelo, calcular duas vezes o logaritmo do fator de Bayes, para comparação entre dois modelos, através do dobro da diferença entre os respectivos LS's.

Como nesta tese comparamos vários modelos, vamos verificar o modelo mais adequado aos dados a partir dos LS's obtidos, pois quanto maior o valor do mesmo, melhor o ajustamento do modelo aos dados. Com isso, não há a necessidade do cálculo do fator de Bayes para cada combinação dois a dois dos modelos propostos.

É importante citarmos Berg *et al.* (2003), onde é dito que o fator de Bayes, e, portanto, o logaritmo da verossimilhança preditiva, destina-se a medir como a priori prediz os dados observados, tendo um enfoque diferente do DIC e do EPD. Como estamos utilizando a distribuição preditiva do número de mortes para estimar as taxas de mortalidade futuras, podemos considerar os métodos EPD e DIC mais relevantes em nossa análise dos melhores modelos bayesianos.

Os resultados obtidos pelos métodos de comparação entre os modelos de graduação bayesiana propostos podem ser verificados nas Tabelas 4.2 a 4.5.

Tabela 4.2: Resultados das medidas de comparação, no ano de 1998, entre os modelos de graduação bayesiana propostos, para ambos os sexos.

<b>Sexo Masculino</b>							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	4.122,00	2.168,34	<b>6.290,34</b>	<b>424,40</b>	13,91	<b>438,31</b>	<b>-226,56</b>
2	4.266,00	2.250,63	6.516,63	426,74	13,56	440,31	-230,83
3	4.884,00	2.238,30	7.122,30	451,82	10,63	462,45	-239,81
4	9.519,00	1.815,63	11.334,63	624,77	1,95	626,73	-318,27
5	5.659,00	1.837,97	7.496,97	465,99	2,20	468,19	-236,50
6	5.554,00	1.853,84	7.407,84	457,93	-0,53	457,39	-232,97
<b>Sexo Feminino</b>							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	1.625,00	754,34	<b>2.379,34</b>	<b>359,26</b>	11,81	371,06	-196,75
2	1.775,00	836,59	2.611,59	361,93	9,78	371,71	-195,21
3	2.159,00	880,74	3.039,74	391,35	7,25	398,60	-210,44
4	1.909,00	658,97	2.567,97	373,26	1,84	375,10	-190,86
5	1.903,00	664,61	2.567,61	370,48	1,85	372,33	-190,71
6	1.815,00	674,34	2.489,34	363,68	-7,81	<b>355,87</b>	<b>-189,02</b>

Tabela 4.3: Resultados das medidas de comparação, no ano de 1999, entre os modelos de graduação bayesiana propostos, para ambos os sexos.

<b>Sexo Masculino</b>							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	4.755,00	2.748,04	<b>7.503,04</b>	<b>430,33</b>	15,67	<b>446,00</b>	<b>-227,43</b>
2	4.887,00	2.833,51	7.720,51	431,87	15,35	447,22	-228,54
3	5.347,00	2.781,68	8.128,68	450,33	11,76	462,09	-238,19
4	11.440,00	2.265,91	13.705,91	625,26	1,99	627,25	-318,48
5	6.315,00	2.292,55	8.607,55	457,36	2,18	459,54	-231,99
6	6.319,00	2.310,28	8.629,28	456,64	-0,07	456,56	-232,27
<b>Sexo Feminino</b>							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	2.410,00	1.127,74	<b>3.537,74</b>	<b>387,37</b>	12,46	399,82	-208,28
2	2.556,00	1.211,75	3.767,75	389,76	11,56	401,32	-207,86
3	2.960,00	1.234,89	4.194,89	417,24	8,73	425,97	-220,68
4	2.905,00	960,67	3.865,67	415,04	1,90	416,94	-209,79
5	2.725,00	970,93	3.695,93	396,00	1,91	397,91	<b>-200,76</b>
6	2.746,00	975,21	3.721,21	395,43	-0,13	<b>395,30</b>	-200,89

Tabela 4.4: Resultados das medidas de comparação, no ano de 2000, entre os modelos de graduação bayesiana propostos, para ambos os sexos.

Sexo Masculino							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	3.606,00	1.861,05	5.467,05	394,57	8,20	402,77	-207,90
2	3.756,00	1.944,78	5.700,78	401,50	8,04	409,54	-211,88
3	4.344,00	1.979,41	6.323,41	435,07	6,32	441,40	-230,97
4	4.210,00	1.721,67	5.931,67	423,34	2,00	425,34	-215,49
5	3.538,00	1.738,77	<b>5.276,77</b>	<b>390,29</b>	-2,58	387,71	<b>-199,05</b>
6	3.536,00	1.741,91	5.277,91	391,72	-4,35	<b>387,37</b>	-199,85
Sexo Feminino							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	1.322,00	791,60	2.113,60	<b>317,93</b>	6,67	324,60	-177,62
2	1.501,00	880,82	2.381,82	329,73	6,16	335,88	-185,63
3	1.896,00	831,29	2.727,29	382,92	4,72	387,64	-210,33
4	1.275,00	641,45	1.916,45	343,65	1,90	345,55	-181,47
5	1.254,00	654,93	1.908,93	326,38	-23,54	<b>302,84</b>	<b>-174,36</b>
6	1.251,00	652,77	<b>1.903,77</b>	327,74	-3,30	324,44	-175,33

Tabela 4.5: Resultados das medidas de comparação, no ano de 2001, entre os modelos de graduação bayesiana propostos, para ambos os sexos.

Sexo Masculino							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	4.549,00	2.183,01	<b>6.732,01</b>	<b>448,38</b>	13,49	461,87	-240,16
2	4.717,00	2.263,74	6.980,74	449,56	13,19	462,74	-240,14
3	5.337,00	2.245,79	7.582,79	479,39	10,24	489,63	-255,22
4	6.682,00	1.824,71	8.506,71	562,92	1,97	564,89	-285,06
5	5.466,00	1.840,86	7.306,86	472,11	2,40	474,52	-239,15
6	5.300,00	1.866,96	7.166,96	460,59	-2,29	<b>458,30</b>	<b>-234,43</b>
Sexo Feminino							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
1	1.127,00	608,70	<b>1.735,70</b>	324,45	11,28	335,73	-181,27
2	1.278,00	690,87	1.968,87	325,94	8,90	334,84	-178,84
3	1.625,00	745,92	2.370,92	355,88	6,42	362,29	-195,21
4	1.252,00	541,86	1.793,86	330,40	1,83	332,23	-174,09
5	1.190,00	551,31	1.741,31	319,34	1,06	320,39	-169,50
6	1.190,00	553,64	1.743,64	<b>318,45</b>	-3,74	<b>314,72</b>	<b>-168,63</b>

Conforme esperado, G(m) decresce à medida que os modelos de graduação tornam-se mais complexos, já P(m) tendem a crescer, pois se trata de uma medida de penalidade aos modelos complexos. Estas afirmativas podem ser verificadas, pois os modelos não paramétricos, que são mais complexos, possuem, em geral, menores G(m) e maiores P(m) que os modelos paramétricos. Podemos, ainda, verificar, no aspecto da

complexidade dos modelos propostos, que os modelos paramétricos possuem um menor número efetivo de parâmetros (pD).

Comparando os modelos de graduação por meio do EPD, podemos verificar que o modelo 1, com exceção do ano de 2000, encontra-se, simultaneamente, mais ajustado aos dados e com uma melhor predição dos dados replicados. Para o ano 2000, utilizando esse método de seleção para o sexo masculino, verificamos que o modelo 6 é o mais adequado; enquanto para o sexo feminino, o modelo 5 é o melhor dentre os propostos.

Analisando o DIC, observamos que, no modelo 6, o pD encontra-se negativo para todos os anos e sexo, então, considerando a afirmativa de Spiegelhalter *et al.* (2002) e (2003), já mencionadas, verificamos que neste modelo a função de verossimilhança não é log-côncava.

Quanto ao primeiro termo do DIC ( $\bar{D}$ ) - uma medida de ajustamento do modelo, verificamos que na maioria dos casos, com exceção do ano de 2000 para o sexo masculino e de 2001 para o sexo feminino, este fator encontra-se menor no modelo 1. No entanto, temos que levar em conta também o termo de complexidade (pD) na análise do método DIC.

Analisando, agora os logaritmos das verossimilhanças preditivas (LS), onde é medida como a priori prediz os dados observados, podemos verificar que na maioria dos casos os modelos paramétricos 5 e 6 encontram-se mais ajustados.

O modelo de pior ajustamento para o sexo feminino é o modelo 3, independente do método utilizado. Já para o sexo masculino, em três dos quatro anos analisados, o modelo 4, modelo paramétrico baseado na Lei de Gompertz, é o pior modelo, isto ocorre pelo fato que nesta lei não é incluído um parâmetro para medir as mortes acidentais, mais presentes no sexo masculino do que no sexo feminino.

Após a análise dos resultados dos métodos de comparação entre modelos (Tabelas 4.2 a 4.5), podemos verificar que o modelo não paramétrico mais adequado é o modelo 1, apesar da utilização da função indicadora, diferente dos demais modelos não paramétricos. Então, utilizaremos esse modelo como referência na construção de tábuas de mortalidade bayesianas no próximo capítulo.

Quanto aos modelos paramétricos propostos, os modelos 5 e 6 estão bem próximos no que diz respeito ao melhor ajuste, pois estes são bem parecidos, ambos prevêm um termo para medir as mortes acidentais (causas externas) e um para medir as

mortes por envelhecimento. No entanto, vamos considerar o modelo 5 como referência, no próximo capítulo, para construção das tábuas de mortalidade bayesianas, pois, no modelo 6, para todos os anos, os números efetivos de parâmetros são negativos.

Um fato relevante é que as probabilidades de mortes estimadas ( $q_{x+i-1}^r$ ) nos modelos paramétricos são mais suaves do que nos modelos não paramétricos. Para efeito de visualização desta afirmativa, podemos observar o Gráfico 4.1, onde estão comparadas as probabilidades de morte estimadas a partir dos modelos: 1 (não paramétrico) e 5 (paramétrico), no ano de 1998 para o sexo masculino.

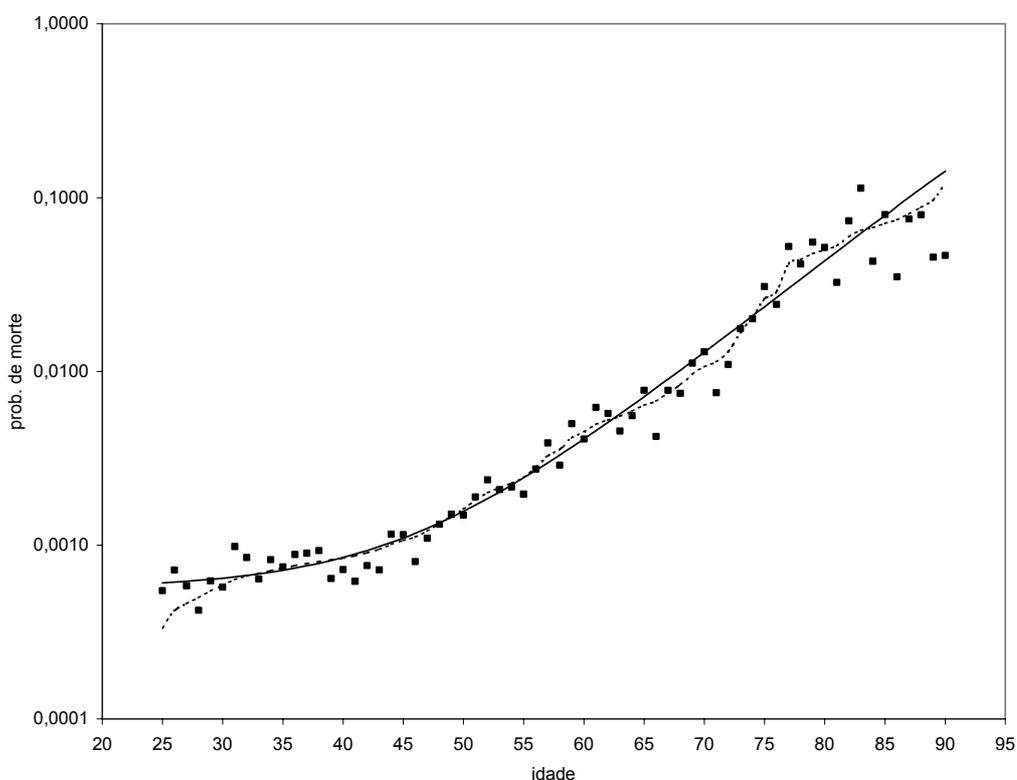


Gráfico 4.1: Probabilidades de mortes estimadas, em escala logarítmica, a partir dos modelos: 1 e 5, no ano de 1998 para o sexo masculino, onde modelo 1 (linha tracejada), modelo 5 (linha cheia) e taxas brutas de mortalidade (\*).

Podemos observar, ainda, analisando as probabilidades de morte estimadas e seu intervalo de probabilidade de 95%, que estes intervalos são maiores nos limites inferior e superior das idades devido a menor quantidade de dados observados nestas idades. Esta afirmativa pode ser verificada observando, a título de exemplo, o Gráfico 4.2

referente às probabilidades de morte estimadas a partir do modelo 1, no ano de 1998 para o sexo masculino.

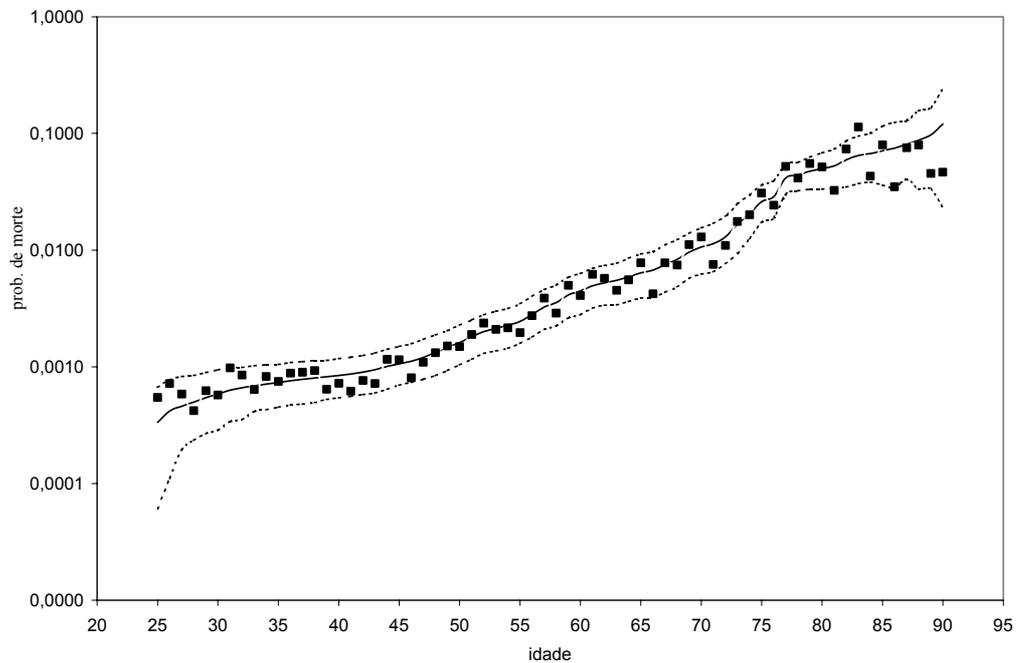


Gráfico 4.2: Probabilidades de morte estimadas, em escala logarítmica, a partir do modelo 1, com intervalo de probabilidades de 95%, no ano de 1998 para o sexo masculino, onde probabilidades de morte estimadas (linha cheia), intervalo de probabilidade de 95% (linha tracejada) e taxas brutas de mortalidade (▪).

## **Capítulo 5 - Construção de Tábuas Biométricas de Mortalidade Bayesianas**

Neste capítulo, serão apresentados modelos bayesianos estáticos e dinâmicos para obtenção de tábuas biométricas de mortalidade para serem utilizadas na cobertura de sobrevivência de planos de previdência complementar aberta e de seguro de vida, para o sexo masculino e feminino, com base nos dados coletados entre os anos de 1998 e 2001.

Define-se tábua biométrica de mortalidade como um conjunto de probabilidades de morte anuais graduadas por idade. A primeira tábua biométrica que se tem conhecimento foi publicada no ano de 1693 por Edmund Halley, conforme disposto em Bowers *et al.* (1986). Esta foi denominada Tábua de Breslau, pois se referia a mortalidade na cidade de Breslau.

Sua construção deve-se levar em conta um período de estudo superior a um ano. Por exemplo, Haberman e Renshaw (1996) e Renshaw e Haberman (2000) propõem que se deve observar um período de quatro anos para fins de análise dos dados e as conhecidas tábuas biométricas: AT-49, AT-83, CSO-2001 (*Commissioners Standart Society Actuary Table-2001*) e VBT-2001 (*Valuation Basic Table-2001*) utilizam um período de observação de seis anos.

As tábuas biométricas historicamente são construídas separadas por sexo, embora, já existam tábuas sendo construídas desagregadas por diversos fatores. Por exemplo: categoria profissional e classificação dos segurados em fumantes e não-fumantes. Esta última desagregação pode ser verificada na construção das tábuas CSO-2001 e VBT-2001, conforme disposto em American Academy of Actuaries (2002).

No Brasil, a regulamentação atual determina que os planos de previdência complementar aberta e de seguro de vida que possuam a cobertura de sobrevivência necessitam de prévia aprovação para serem comercializados, havendo a necessidade de definição da tábua biométrica de mortalidade no momento da referida aprovação. Esta tábua biométrica aprovada não pode mais ser alterada, sendo válida da entrada do primeiro consumidor do plano até a morte do último assistido. Portanto, existe uma preocupação muito grande das seguradoras para que a tábua de mortalidade definida

esteja realmente refletindo a realidade, preocupação que deve ser maior ainda, porque as tábuas utilizadas atualmente pelo mercado são tábuas americanas.

Os compromissos futuros das companhias (provisões matemáticas) são calculados com base nos valores das anuidades, como será demonstrado no próximo capítulo. Estas por sua vez são definidas em função das probabilidades de morte constantes da tábua biométrica e da taxa de juros fixadas no plano, sendo estes fatores inversamente proporcionais ao valor da anuidade. Por este motivo, é muito importante que a tábua biométrica de mortalidade utilizada na cobertura de sobrevivência de um plano de seguro ou de previdência reflita a realidade da massa segurada. Pois, a utilização de tábua biométrica menos conservadora, ou seja, com probabilidades de morte superiores as observadas na massa exposta, pode levar a seguradora à insolvência, com a constituição de provisões matemáticas a menor que o necessário.

Para tentar reduzir este problema, causado pela falta de conhecimento da mortalidade da massa segurada, as companhias estão sendo bastante conservadoras na fixação da taxa de juros, para que eventuais perdas técnicas sejam compensadas com os ganhos financeiros. Portanto, a cada dia o mercado segurador brasileiro vem tornando-se menos técnico.

Para verificarmos a real mortalidade dos expostos ao risco na cobertura de sobrevivência dos planos de previdência complementar aberta e de seguro de vida no Brasil, neste capítulo, os modelos 1 e 5 do capítulo anterior são estendidos para incluir o tempo, dando origem a quatro modelos para construção de tábuas de mortalidade bayesianas: estático não paramétrico, estático paramétrico, dinâmico não paramétrico e dinâmico paramétrico. Teremos assim modelos de painel ou de dados longitudinais.

Tal qual realizado no capítulo 4, nos modelos propostos para construção de tábuas de mortalidade bayesianas:

1. estimamos as probabilidades de morte futuras para cada idade, por meio da distribuição preditiva do número de mortes observadas;
2. as tábuas de mortalidade bayesianas apresentarão probabilidades anuais de morte para as idades compreendidas entre 25 e 90 anos; e
3. consideramos como estimadores bayesianos das probabilidades de morte as médias dos valores amostrais preditos.

Após a implementação e análise de convergência dos modelos propostos, verificaremos qual o melhor modelo para construção das tábuas biométricas de mortalidade bayesianas para a cobertura de sobrevivência nos planos de seguro e de previdência complementar aberta, ou seja, qual o modelo, que ao mesmo tempo, possui o melhor ajuste aos dados observados e a melhor predição dos dados replicados, por meio dos métodos já apresentados no capítulo 4.

Após a obtenção da tábua biométrica de mortalidade bayesiana mais adequada para cada sexo, iremos compará-las, neste capítulo, com conhecidas tábuas de mortalidade.

### 5.1 Modelo estático não paramétrico

Este modelo implicitamente admite que o tempo não é fator relevante. Os dados são considerados com o mesmo peso em cada ano, caracterizando uma regressão com replicações em cada faixa etária.

Como, neste modelo, para construção de tábuas de mortalidade, vamos nos basear no modelo 1, apresentado no capítulo anterior, para suavização das taxas brutas de mortalidade é utilizada a mesma restrição à força de mortalidade ( $\theta \in R_I = \{\theta : 0 < \theta_1 < \dots < \theta_k < 1\}$ ), com a finalidade de graduar as probabilidades de morte estimadas.

No entanto, a função de verossimilhança apresentada por Broffit (1988) é convenientemente modificada, pois temos agora de considerar os dados dos quatro anos de estudo, tal modificação corresponde a assumir que  $d_{i,t} | \theta_i$  tem distribuição Poisson ( $e_{i,t} \cdot \theta_i$ ), considerando  $e_{i,t}$  como constantes conhecidas, obtemos:

$$l(\theta | y_o) \propto \prod_{t=1}^4 \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_{i,t}} \exp(-e_{i,t} \cdot \theta_i), \quad (5.1)$$

onde  $y_o = (d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{66,3}, d_{66,4})$ , para  $i = 1, \dots, 66$ ,  $x = 25$  e  $t = 1, \dots, 4$ , sendo:

$e_{i,t}$ : quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x + i - 1$  no ano  $t$ ; e

$d_{i,t}$ : número de mortes observadas na idade  $x + i - 1$  no ano  $t$ .

A distribuição a priori de  $\theta_i$  é a mesma utilizada no modelo 1 do capítulo 4 e após a especificação da função de verossimilhança e da priori, a distribuição conjunta dos parâmetros e dos dados é dada por:

$$p(y_o, \theta | \alpha, \beta) \propto \prod_{t=1}^4 \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{d_{i,t}} \exp(-e_{i,t} \theta_i) \prod_{i=1}^{66} \theta_i^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_i) I_{R_i}(\theta_i), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} I_{R_i}(\theta) = 1, \text{ se } \theta \in R_i; \\ I_{R_i}(\theta) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, a distribuição a posterior condicional completa de  $\theta_i$ , considerando todos os demais parâmetros é dada por:

$$p(\theta_i | y_o, \alpha, \beta) \propto \text{Gamma}(\theta_i | \alpha_i^*, \beta_i^*) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i), i = 1, \dots, 66, \text{ onde}$$

$$\alpha_i^* = \alpha + \sum_{t=1}^4 d_{i,t} \text{ e } \beta_i^* = \beta + \sum_{t=1}^4 e_{i,t}.$$

Em resumo, o modelo bayesiano estático não paramétrico proposto para construção de tábuas biométricas fica descrito por:

$d_{i,t} | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_{i,t} \cdot \theta_i)$ ,  $e_{i,t}$  constantes conhecidas,  $i = 1, \dots, 66$  e  $t = 1, \dots, 4$ ;

$\theta_i | \alpha, \beta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) I_{(\theta_{i-1}, \theta_{i+1})}(\theta_i)$ , com  $\theta_0 = 0$  e  $\theta_{67} = 1$ ;

sendo  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,001$ ;

onde predição é realizada da seguinte forma:

$$d_{i,t}^r | \theta_i \sim \text{Poisson}(e_{i,t} \cdot \theta_i)$$

$$\theta_i^r = \frac{\sum_{t=1}^4 d_{i,t}^r}{\sum_{t=1}^4 e_{i,t}} \quad (5.2)$$

$$q_{x+i-1}^r = 1 - \exp(-\theta_i^r)$$

## 5.2 Modelo estático paramétrico

Por se tratar de um modelo estático, não vamos considerar a evolução temporal dos parâmetros a serem estimados neste modelo ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ ).

O modelo é o mesmo apresentado na seção 4.2.2, com a conveniente modificação na função de verossimilhança, já descrita na seção 5.1, então:

1. as taxas brutas de mortalidade são graduadas por meio da adequação das forças de mortalidade à Lei de Makeham;
2. o modelo é calcado em modelos lineares generalizados bayesianos com base no modelo clássico não preditivo descrito em Haberman e Renshaw (1996); e
3. assumimos  $d_{i,t} | \theta_i$  distribuídos por meio da distribuição Poisson ( $e_{i,t} \cdot \theta_i$ ), sendo  $d_{i,t}$  o número de mortes observadas na idade  $x + i - 1$  no ano  $t$  e  $e_{i,t}$  a quantidade central de expostos ao risco observados na idade  $x + i - 1$  no ano  $t$ , considerando  $e_{i,t}$  constantes conhecidas, para  $i = 1, \dots, 66$ ,  $x = 25$  e  $t = 1, \dots, 4$ .

Assim:

$$E(d_{i,t} | \theta_i) = \lambda_{i,t} = e_{i,t} \cdot \theta_i$$

Como a função de ligação canônica ( $\eta_{i,t}$ ) da distribuição Poisson é dada por  $\log(\lambda_{i,t})$ , a estrutura do modelo linear generalizado é representada por:

$$\eta_{i,t} = \log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\theta_i)$$

Utilizamos como preditor linear das forças de mortalidade a função matemática apresentada em (4.3), assim:

$$\eta_{i,t} = \log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i})$$

Para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , como realizado na seção 4.2.2, determinamos distribuições a priori modeladas de acordo com distribuições Normais não informativas, observando as restrições impostas pela Lei de Makeham.

Então, em resumo, o modelo bayesiano estático paramétrico proposto fica descrito por:

$$\begin{aligned}
 & d_{i,t} | \theta_i \sim \text{Poisson}(\lambda_{i,t}), \lambda_{i,t} = e_{i,t} \cdot \theta_i, e_{i,t} \text{ constantes conhecidas, } i = 1, \dots, 66 \text{ e} \\
 & t = 1, \dots, 4; \\
 & \log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i}); \\
 & \theta_i = \alpha + \beta \cdot \delta^{Z_i}; \\
 & \alpha \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\alpha);
 \end{aligned}$$

$$\beta \sim \text{Normal} ( 0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\beta);$$

$$\delta \sim \text{Normal} ( 0, 0,0001) I_{(1,\infty)}(\delta);$$

onde a predição é realizada através de (5.2).

### 5.3 Modelo dinâmico não paramétrico

Este modelo é construído com base no modelo 1, apresentado no capítulo anterior, considerando agora uma evolução no tempo do parâmetro  $\theta_i$  (força de mortalidade no intervalo de tempo  $i$ ) a ser estimado.

Vamos realizar uma alteração na função de verossimilhança, em relação aos modelos anteriormente apresentados, considerando agora  $d_{i,t}$  modelado como sendo Poisson distribuído com média  $e_{i,t} \cdot \theta_{i,t}$ , onde  $e_{i,t}$  são constantes conhecidas:

$$l(\theta | y_o) \propto \prod_{t=1}^4 \prod_{i=1}^{66} \theta_{i,t}^{d_{i,t}} \exp(-e_{i,t} \cdot \theta_{i,t}), \text{ onde } y_o = (d_{1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{66,3}, d_{66,4})$$
(5.3)

Para modelar a evolução temporal de  $\theta_i$  utilizamos modelos dinâmicos generalizados. Então, com essa modelagem temporal as probabilidades de morte futuras estimadas ( $q_{x+i-1}^r$ ) considerarão a evolução temporal ocorrida na mortalidade entre os anos de 1998 e 2001.

Consideramos  $\theta_{i,t}$  (força de mortalidade no intervalo de tempo  $i$  no ano  $t$ ) relacionadas através de perturbações multiplicativas (Gameran, 1996), obtemos, assim, a seguinte equação de evolução de parâmetros:

$$\theta_{i,t} = \theta_{i,t-1} \cdot w_t^*$$
(5.4)

Aplicando a transformação logarítmica em (5.4), temos:

$$\log(\theta_{i,t}) = \log(\theta_{i,t-1}) + w_t, \text{ onde } w_t = \log(w_t^*)$$
(5.5)

O modelo deve ser completado atribuindo uma distribuição a priori para  $\theta_{i,1}$ , esta será a mesma utilizada no modelo 1 do capítulo anterior, assumindo  $\theta_{i,1}$

independentes e identicamente distribuídos com distribuição conjugada Gamma( $\alpha, \beta$ ) não informativa e restrita, com  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,001$ . Com isso, a distribuição a priori é dada por:

$$p(\theta_1 | \alpha, \beta) \propto \prod_{i=1}^{66} \theta_{i,1}^{\alpha-1} \exp(-\beta \cdot \theta_{i,1}) I_{R_I}(\theta_1), \text{ onde}$$

$$\begin{cases} I_{R_I}(\theta_1) = 1, \text{ se } \theta_1 \in R_I; \\ I_{R_I}(\theta_1) = 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Como estamos utilizando a restrição à força de mortalidade  $\theta_1 \in R_I = \{\theta_1 : 0 < \theta_{1,1} < \dots < \theta_{k,1} < 1\}$  para graduar os parâmetros  $\theta_{i,1}$  e estamos estimando  $\theta_{i,t}$  através da equação de evolução de parâmetros (5.5), obtemos  $\theta_{i,t}$  graduados para todo t. Dessa forma,  $q_{x+i-1}^r$ , também, encontram-se graduados.

Quanto às perturbações do sistema  $w_t$ , vamos atribuir distribuições a priori  $w_t \sim \text{Normal}(0, W_t)$ , onde  $W_t$  descreve a velocidade em que os parâmetros evoluem no tempo. Considerando esta variável desconhecida vamos estimá-la atribuindo uma distribuição a priori Gamma não informativa para o inverso desta variável (precisão da distribuição de  $w_t$ ). Ressaltamos que, conceitualmente, se  $W_t \equiv 0$ , este modelo é equivalente ao modelo estático não paramétrico apresentado na seção 5.1.

Neste modelo, não é possível a inferência bayesiana exata, no entanto, não há problemas, pois estamos estimando por meio do Amostrador de Gibbs no WinBUGS.

Assim, em resumo, o modelo bayesiano dinâmico não paramétrico proposto para construção de tábuas biométricas fica descrito por:

$$d_{i,t} | \theta_{i,t} \sim \text{Poisson}(e_{i,t} \cdot \theta_{i,t}), \quad e_{i,t} \text{ constantes conhecidas, } i = 1, \dots, 66 \text{ e } t = 1, \dots, 4;$$

$$\log(\theta_{i,t}) = \log(\theta_{i,t-1}) + w_t;$$

$$\theta_{i,1} | \alpha, \beta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \cdot I_{(\theta_{i-1,1}, \theta_{i+1,1})}(\theta_{i,1}), \text{ com } \theta_{0,1} = 0 \text{ e } \theta_{67,1} = 1;$$

sendo  $\alpha = 0,001$  e  $\beta = 0,001$ ;

$$w_t \sim \text{Normal}(0, W_t);$$

$$\tau_{i,t} \sim \text{Gamma}(0,01, 0,01);$$

$$W_t = \frac{1}{\tau u_t};$$

onde predição é realizada da seguinte forma:

$$d_{i,t}^r | \theta_{i,t} \sim \text{Poisson}(e_{i,t} \cdot \theta_{i,t})$$

$$\theta_i^r = \frac{d_{i,4}^r}{e_{i,4}} \quad (5.6)$$

$$q_{x+i-1}^r = 1 - \exp(-\theta_i^r)$$

#### 5.4 Modelo dinâmico paramétrico

Neste modelo, onde graduamos as taxas brutas de mortalidade por meio do ajuste das forças de mortalidade à Lei de Makeham, vamos modelar a evolução temporal dos parâmetros ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ ) que compõem essa lei de sobrevivência.

Vamos construir o modelo de graduação bayesiana utilizando modelos lineares generalizados dinâmicos, assumindo a mesma função de verossimilhança descrita na seção anterior, então:

$$E(d_{i,t} | \theta_{i,t}) = \lambda_{i,t} = e_{i,t} \cdot \theta_{i,t}$$

A partir da função de ligação canônica ( $\eta_{i,t}$ ) da distribuição Poisson, obtemos a seguinte estrutura:

$$\eta_{i,t} = \log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\theta_{i,t})$$

Nesta seção, utilizamos como preditores lineares das forças de mortalidade a função de sobrevivência descrita em (4.3), com uma adaptação, pois os parâmetros agora prevêem um desenvolvimento no tempo:

$$\theta_{i,t} = \alpha_t + \beta_t \cdot \delta_t^{Z_i}, \text{ sendo:}$$

$$Z_i = x + i - 1 \quad (Z_i = 25, \dots, 90), \quad x = 25, \quad i = 1, \dots, 66 \text{ e } t = 1, \dots, 4.$$

Com isso, temos:

$$\eta_{i,t} = \log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\alpha_t + \beta_t \cdot \delta_t^{Z_i})$$

Consideramos os parâmetros que compõem a Lei de Makeham relacionados por meio de perturbações multiplicativas, temos, então as seguintes equações de evolução de parâmetros:

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \alpha_{t-1} \cdot wa_t^* \\ \beta_t &= \beta_{t-1} \cdot wb_t^* \\ \delta_t &= \delta_{t-1} \cdot wc_t^*\end{aligned}\tag{5.7}$$

Aplicando transformações logarítmicas em (5.7), obtemos as respectivas equações:

$$\begin{aligned}\log(\alpha_t) &= \log(\alpha_{t-1}) + wa_t, \text{ onde } wa_t = \log(wa_t^*) \\ \log(\beta_t) &= \log(\beta_{t-1}) + wb_t, \text{ onde } wb_t = \log(wb_t^*) \\ \log(\delta_t) &= \log(\delta_{t-1}) + wc_t, \text{ onde } wc_t = \log(wc_t^*)\end{aligned}$$

Para completar o modelo, temos que atribuir distribuições a priori para os parâmetros:  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\delta_1$ . Para isso, modelamos estes parâmetros por meio de distribuições Normais não informativas, respeitando as restrições impostas pela Lei de Makeham.

Quanto às perturbações do sistema ( $wa_t$ ,  $wb_t$  e  $wc_t$ ), vamos atribuir as seguintes distribuições a priori:

$$\begin{aligned}wa_t &\sim \text{Normal}(0, Wa_t) \\ wb_t &\sim \text{Normal}(0, Wb_t) \\ wc_t &\sim \text{Normal}(0, Wc_t)\end{aligned}$$

Como na seção anterior, vamos modelar o inverso das variáveis que medem como os parâmetros evoluem no tempo ( $Wa_t$ ,  $Wb_t$  e  $Wc_t$ ) por meio de distribuições Gammas não informativas. Ressaltamos que, conceitualmente, se  $Wa_t \equiv 0$ ,  $Wb_t \equiv 0$  e  $Wc_t \equiv 0$ , este modelo é equivalente ao modelo estático paramétrico apresentado na seção 5.2.

Como descrito em Gamerman (1996), “não é possível a realização da inferência exata pela dificuldade na obtenção das distribuições marginais relevantes”, no entanto, como já explicado, no decorrer desta tese, não há problemas para estimarmos os parâmetros de interesse.

Em resumo, o modelo bayesiano dinâmico paramétrico proposto para construção de tábuas biométricas fica descrito por:

$$\begin{aligned}
 & d_{i,t} | \theta_{i,t} \sim \text{Poisson}(\lambda_{i,t}), \lambda_{i,t} = e_{i,t} \cdot \theta_{i,t}, e_{i,t} \text{ constantes conhecidas, } i = 1, \dots, 66 \text{ e} \\
 & t = 1, \dots, 4; \\
 & \log(\lambda_{i,t}) = \log(e_{i,t}) + \log(\alpha_t + \beta_t \cdot \delta_t^{Z_i}); \\
 & \theta_{i,t} = \alpha_t + \beta_t \cdot \delta_t^{Z_i}; \\
 & \log(\alpha_t) = \log(\alpha_{t-1}) + \text{wa}_t; \\
 & \log(\beta_t) = \log(\beta_{t-1}) + \text{wb}_t; \\
 & \log(\delta_t) = \log(\delta_{t-1}) + \text{wc}_t; \\
 & \alpha_1 \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\alpha_1); \\
 & \beta_1 \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(0,\infty)}(\beta_1); \\
 & \delta_1 \sim \text{Normal}(0, 0,0001) I_{(1,\infty)}(\delta_1); \\
 & \text{wa}_t \sim \text{Normal}(0, \text{Wa}_t); \\
 & \text{wb}_t \sim \text{Normal}(0, \text{Wb}_t); \\
 & \text{wc}_t \sim \text{Normal}(0, \text{Wc}_t); \\
 & \text{taua}_t \sim \text{Gamma}(0,01, 0,01); \\
 & \text{taub}_t \sim \text{Gamma}(0,01, 0,01); \\
 & \text{tauc}_t \sim \text{Gamma}(0,01, 0,01); \\
 & \text{Wa}_t = \frac{1}{\text{taua}_t}; \\
 & \text{Wb}_t = \frac{1}{\text{taub}_t}; \\
 & \text{Wc}_t = \frac{1}{\text{tauc}_t};
 \end{aligned}$$

onde a predição é realizada através de (5.6).

## 5.5 Implementação e análise de convergência

Como nos modelos de graduação do capítulo anterior, os modelos para construção de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas são implementados, para ambos os sexos, no WinBUGS versão 1.4. O tempo computacional de implementação dos modelos, em um PC com 1.8GHz e 512MB de memória RAM, fica em torno de 15 minutos, com exceção do modelo dinâmico paramétrico que necessita de cerca de 50 minutos para ser implementado. Os programas elaborados para implementar os modelos descritos neste capítulo estão dispostos no Anexo VI.

Mais uma vez, simulamos três cadeias em paralelo com valores iniciais distintos, considerando um período de aquecimento de 20.000 iterações, para assegurarmos a convergência dos modelos, e geramos para cada cadeia, após o aquecimento, mais 20.000 iterações. Com isso, obtemos para cada parâmetro de interesse uma amostra de tamanho igual a 60.000.

Verificamos a convergência dos modelos utilizando os critérios descritos na seção 4.3: análise do gráfico da distribuição de densidade, do gráfico da função de autocorrelação, do gráfico “trace” e da estatística de Gelman-Rubin modificada por Brooks e Gelman (1998).

Com o objetivo de exemplificar a análise de convergência dos modelos propostos, os gráficos de convergência do parâmetro  $q_{40}^r$  (probabilidade de morte estimada para a idade de 40 anos) estimado através do modelo dinâmico paramétrico, para o sexo masculino, podem ser observados no Anexo VII.

Após a implementação e análise de convergência dos modelos, na próxima seção, vamos comparar os modelos propostos para construção de tábuas de mortalidade bayesianas e analisaremos os resultados obtidos para ambos os sexos.

## 5.6 Comparação entre os modelos e análise dos resultados

Para determinação do melhor modelo para construção de tábuas biométricas bayesianas, ou seja, o modelo que, simultaneamente, melhor ajusta-se aos dados observados e melhor prediz os dados replicados, utilizamos os mesmos métodos

apresentados na seção 4.4: EPD (*Expected Predictive Deviance*), DIC (*Deviance Information Criterion*) e fator de Bayes, este utilizado por meio da análise do logaritmo da verossimilhança preditiva (LS) de cada modelo.

Podemos analisar, na Tabela 5.1, os resultados obtidos pelos métodos de comparação entre os modelos propostos para construção de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas.

Tabela 5.1: Resultados das medidas de comparação entre os modelos propostos para construção de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas, para ambos os sexos.

<b>Sexo Masculino</b>							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
estático não paramétrico	47.140,00	8.057,86	55.197,86	2.692,94	21,14	2.714,08	-1.415,62
estático paramétrico	49.780,00	7.468,64	57.248,64	2.776,73	2,72	2.779,45	-1.400,44
dinâmico não paramétrico	30.500,00	8.123,47	38.623,47	2.170,69	24,22	2.194,92	-1.130,87
dinâmico paramétrico	20.940,00	7.672,98	<b>28.612,98</b>	1.782,85	7,38	<b>1.790,23</b>	<b>-905,33</b>
<b>Sexo Feminino</b>							
Modelos	G(m)	P(m)	D(m)	D	pD	DIC	LS
estático não paramétrico	13.790,00	2.936,52	16.726,52	1.955,60	16,47	1.972,07	-1.036,89
estático paramétrico	14.090,00	2.768,58	16.858,58	1.978,10	2,47	1.980,57	-1.017,75
dinâmico não paramétrico	9.379,00	2.959,46	12.338,46	1.652,58	19,54	1.672,12	-872,87
dinâmico paramétrico	7.087,00	2.818,47	<b>9.905,47</b>	1.411,31	8,34	<b>1.419,64</b>	<b>-733,46</b>

Verificamos, observando os resultados dispostos na Tabela 5.1, que os modelos dinâmicos são mais complexos que os modelos estáticos. Esta afirmativa pode ser confirmada pela análise de G(m), termo este que decresce à medida que os modelos tornam-se mais complexos. Quanto ao P(m), que tende a crescer com a complexidade por ser uma medida de penalidade, são maiores nos modelos dinâmicos, comparando paramétricos e não paramétricos, separadamente, pois, como demonstrado no capítulo anterior, os modelos não paramétricos são mais complexos que os paramétricos. Ainda analisando a complexidade dos modelos, podemos notar que os números efetivos de parâmetros (pD) são maiores nos modelos dinâmicos, se compararmos, mais uma vez, paramétricos e não paramétricos separadamente.

Na verificação do modelo que, simultaneamente, mais se ajusta aos dados observados e melhor prediz os dados replicados, concluímos que, observando os resultados constantes da Tabela 5.1, independente do sexo e do método de comparação

utilizado, os modelos dinâmicos são os melhores modelos para construção das tábuas biométricas de mortalidade bayesianas, por medirem a evolução das taxas de mortalidade no período analisado e considerarem esta evolução na estimação das probabilidades de mortes futuras ( $q_{x+i-1}^r$ ), diferente dos modelos estáticos, onde os dados são considerados com o mesmo peso em cada ano.

Comparando, agora, o modelo dinâmico paramétrico e o dinâmico não paramétrico, verificamos que o primeiro modelo, analisando todos os métodos de comparação propostos, para ambos os sexos, é o mais apropriado para construção de tábuas biométricas de mortalidade bayesianas.

Por este fato, nas Tabelas 5.2 e 5.3, respectivamente para o sexo masculino e feminino, apresentamos a evolução temporal, no modelo dinâmico paramétrico, dos parâmetros que compõem a Lei de Makeham ( $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ ) e das perturbações do sistema ( $wa_t$ ,  $wb_t$  e  $wc_t$ ), através da média e do intervalo de probabilidade de 95% destes parâmetros.

Tabela 5.2: Evolução temporal dos parâmetros no modelo dinâmico paramétrico, para o sexo masculino.

ano	$\alpha$			$\beta$			$\delta$		
	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%
1998	0,000563	0,000487	0,000643	0,000002	0,000001	0,000003	1,134000	1,128000	1,140000
1999	0,000554	0,000480	0,000625	0,000002	0,000001	0,000002	1,133000	1,127000	1,138000
2000	0,000667	0,000556	0,000767	0,000008	0,000003	0,000017	1,089000	1,076000	1,101000
2001	0,000238	0,000190	0,000287	0,000003	0,000002	0,000004	1,117000	1,112000	1,124000
ano	wa			wb			wc		
	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%
1998	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1999	-0,014760	-0,190600	0,160800	-0,052170	-0,534300	0,232900	-0,001355	-0,005353	0,005398
2000	0,183900	-0,022610	0,402700	1,476000	0,403600	2,278000	-0,039560	-0,050670	-0,024910
2001	-1,034000	-1,281000	-0,789200	-1,057000	-1,834000	-0,326900	0,025900	0,015850	0,036790

Tabela 5.3: Evolução temporal dos parâmetros no modelo dinâmico paramétrico, para o sexo feminino.

ano	$\alpha$			$\beta$			$\delta$		
	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%
1998	0,000122	0,000051	0,000198	0,000003	0,000002	0,000006	1,121000	1,112000	1,131000
1999	0,000182	0,000115	0,000261	0,000003	0,000002	0,000005	1,121000	1,114000	1,128000
2000	0,000555	0,000472	0,000640	0,000003	0,000001	0,000006	1,099000	1,089000	1,114000
2001	0,000073	0,000016	0,000129	0,000002	0,000001	0,000004	1,114000	1,103000	1,127000
ano	wa			wb			wc		
	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%	média	2,50%	97,50%
1998	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1999	0,429000	-0,133900	1,225000	-0,038200	-0,618000	0,546200	-0,000079	-0,008514	0,008632
2000	1,136000	0,740500	1,584000	-0,119800	-1,048000	0,633500	-0,019480	-0,029140	-0,006511
2001	-2,159000	-3,530000	-1,445000	-0,297000	-1,145000	0,317600	0,013210	0,004299	0,024730

As probabilidades de morte estimadas, bem como seus intervalos de probabilidade de 95%, de todos os modelos propostos para construção de tábuas de mortalidade bayesianas, para o sexo masculino e feminino, estão disponíveis no Anexo VIII.

Analisando as probabilidades de morte estimadas e seu intervalo de probabilidade de 95%, é importante comentarmos que nos modelos estáticos, apesar de serem menos ajustados aos dados, os intervalos de probabilidades são menores que nos modelos dinâmicos. Esta afirmativa pode ser verificada, a título de exemplo, se observarmos os Gráficos 5.1 e 5.2, referentes, respectivamente, ao modelo estático paramétrico e ao modelo dinâmico paramétrico, ambos para o sexo masculino, dispostos a seguir.

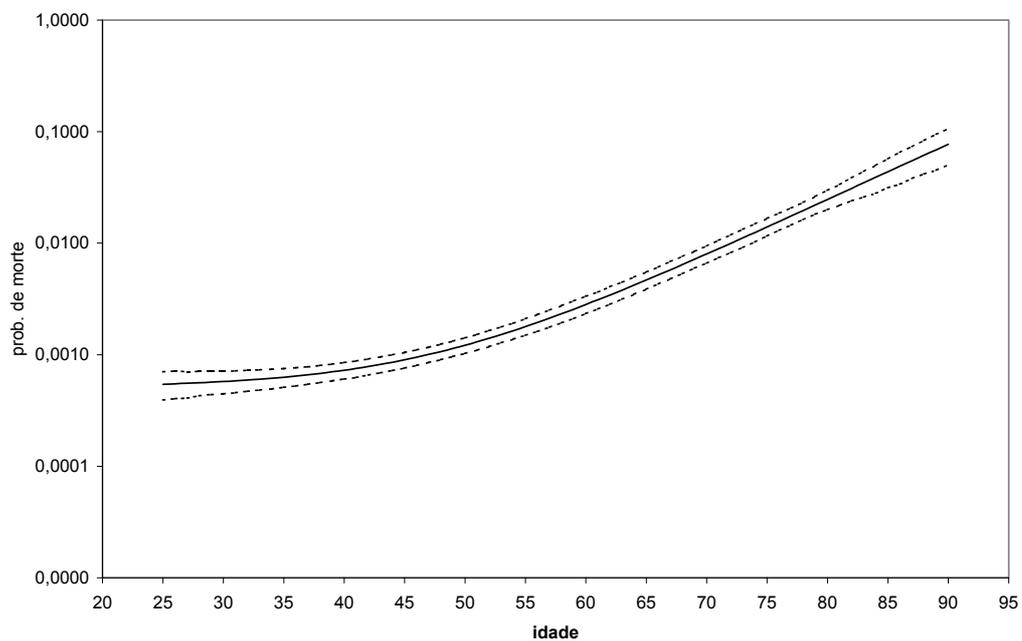


Gráfico 5.1: Probabilidades de morte estimadas, em escala logarítmica, a partir do modelo estático paramétrico, com intervalo de probabilidade de 95%, para o sexo masculino, onde probabilidades de morte estimadas (linhas cheia) e intervalo de probabilidade de 95% (linha tracejada).

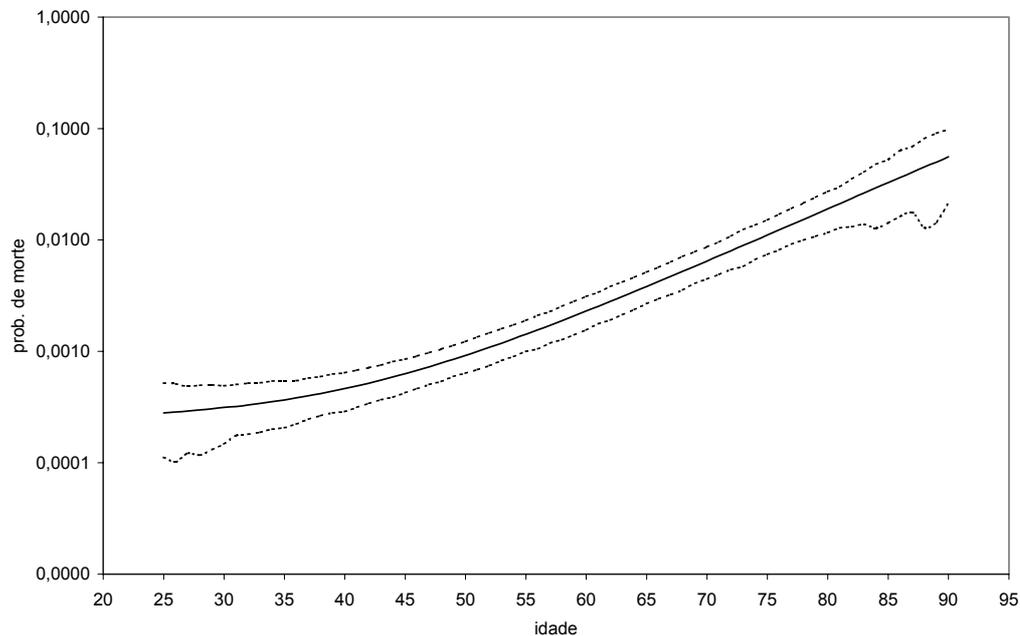


Gráfico 5.2: Probabilidades de morte estimadas, em escala logarítmica, a partir do modelo dinâmico paramétrico, com intervalo de probabilidade de 95%, para o sexo masculino, onde probabilidades de morte estimadas (linhas cheia) e intervalo de probabilidade de 95% (linha tracejada).

No que diz respeito à suavização das taxas de mortalidade, como já mostrado no capítulo anterior, nos modelos paramétricos propostos para construção de tábuas de mortalidade bayesianas as probabilidades de mortes estimadas são mais suavizadas que nos modelos não paramétricos, podemos verificar esta questão analisando o Gráfico 5.3, onde estão comparadas as probabilidades de morte estimadas a partir dos modelos: dinâmico não paramétrico e dinâmico paramétrico, ambos para o sexo masculino.

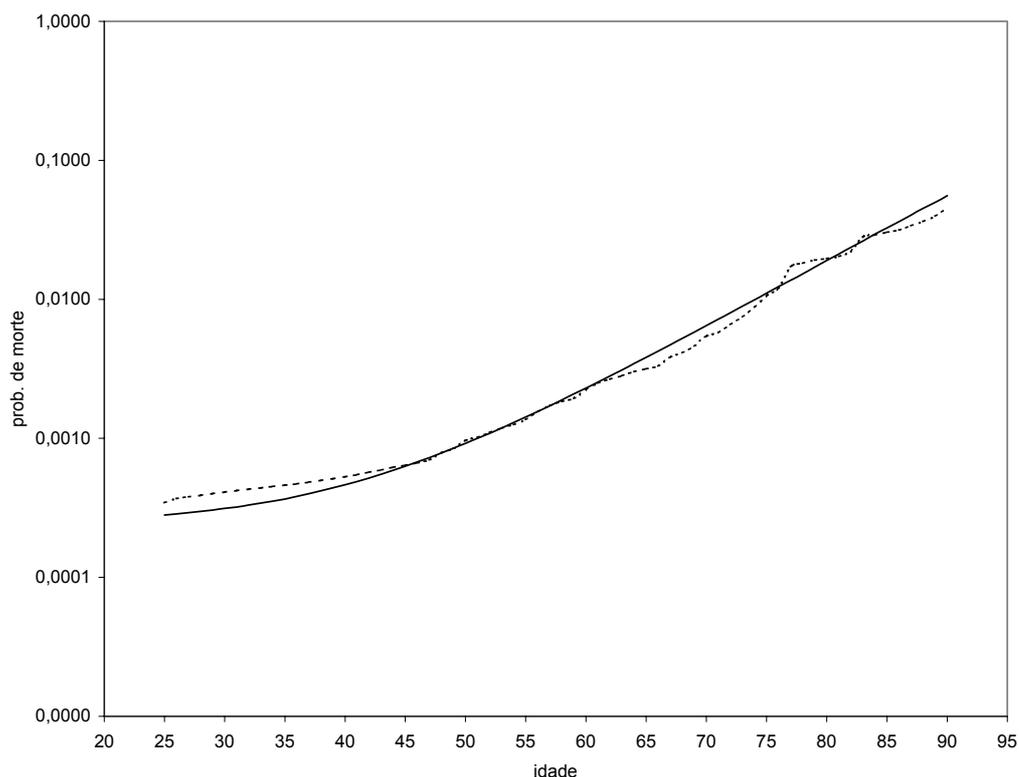


Gráfico 5.3: Probabilidades de mortes estimadas, em escala logarítmica, a partir dos modelos: dinâmico não paramétrico e dinâmico paramétrico, para o sexo masculino, onde modelo dinâmico paramétrico (linha cheia) e não paramétrico (linha tracejada).

Após a verificação do modelo proposto mais apropriado para construção de tábuas de mortalidade bayesianas (modelo dinâmico paramétrico), vamos comparar as tábuas de mortalidade obtidas por meio deste modelo, para o sexo masculino e feminino, com conhecidas tábuas de mortalidade.

Nos Gráficos 5.4 e 5.5, respectivamente, para o sexo masculino e feminino, podemos comparar as probabilidades de morte estimadas, bem como seu intervalo de probabilidade de 95%, com três tábuas biométricas de mortalidade: AT-83 *Male* - tábua determinada pelo Conselho Nacional de Seguros Privados - CNSP como limite máximo de probabilidade de morte para a cobertura de sobrevivência e bastante utilizada pelo mercado segurador brasileiro; AT-2000 *Basic* – tábua mais utilizada atualmente pelo mercado e VBT-2001, com período de seleção de um ano – uma tábua mais recente, descrita em American Academy of Actuaries (2002) e ainda não utilizada no Brasil, as

duas últimas tábuas são comparados com as tábuas construídas em suas versões masculina e feminina, respectivamente.

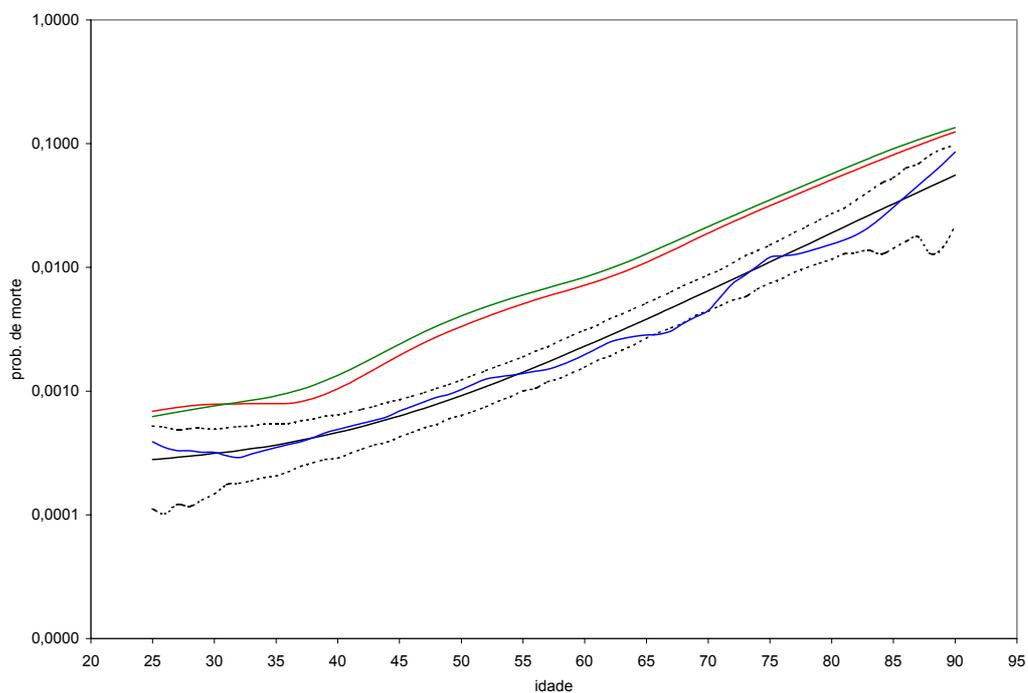


Gráfico 5.4: Comparação entre a tábua de mortalidade bayesiana para o sexo masculino construída, bem como seu intervalo de probabilidade de 95%, com conhecidas tábuas de mortalidade (em escala logarítmica), onde probabilidades de mortes estimadas/tábua de mortalidade (preto – linha cheia), intervalo de probabilidade de 95% (preto - linha tracejada), AT-83 *Male* (verde), AT-2000 *Basic Male* (vermelho) e VBT-2001 *Male* (azul).

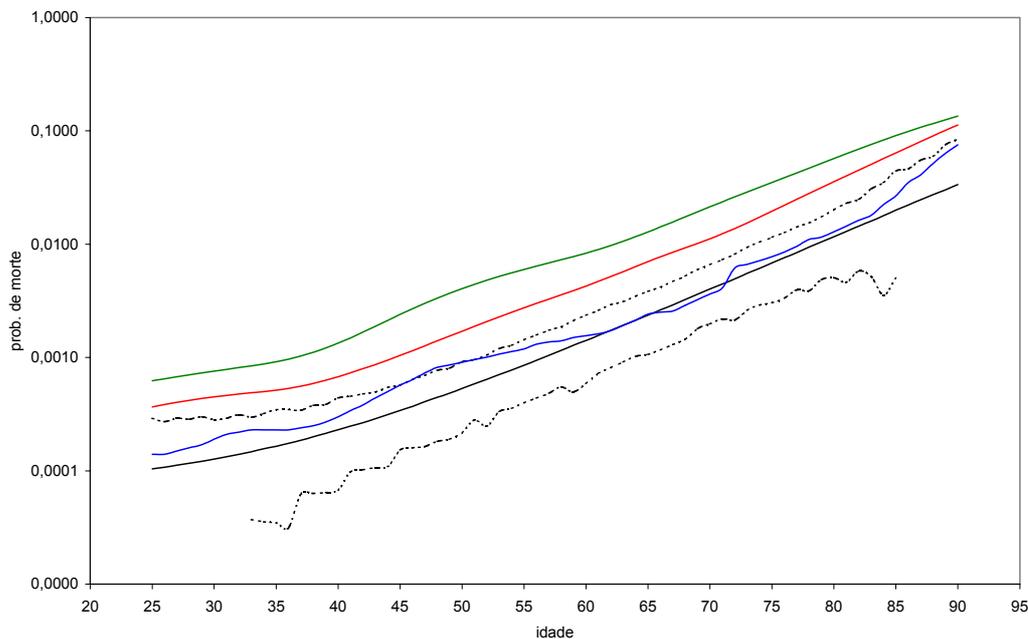


Gráfico 5.5: Comparação entre a tábua de mortalidade bayesiana para o sexo feminino construída, bem como seu intervalo de probabilidade de 95%, com conhecidas tábuas de mortalidade (em escala logarítmica), onde probabilidades de mortes estimadas/tábua de mortalidade (preto – linha cheia), intervalo de probabilidade de 95% (preto - linha tracejada), AT-83 *Male* (verde), AT-2000 *Basic Female* (vermelho) e VBT-2001 *Female* (azul).

Com a análise dos Gráficos 5.4 e 5.5, podemos verificar que a tábua utilizada como limite máximo de probabilidade (AT-83 *Male*) está defasada, ou seja, possui probabilidades de morte superiores às obtidas para população que contrata a cobertura de sobrevivência no Brasil. A mesma afirmativa podemos fazer com as tábuas AT-2000 *Basic Male* e *Basic Female*, comparadas respectivamente com as tábuas de mortalidade bayesianas construídas para o sexo masculino e feminino. Esta conclusão significa dizer que em sua maioria as companhias estão considerando, na cobertura de sobrevivência de planos de seguro e previdência, que os consumidores irão sobreviver por um tempo inferior ao estimado, podendo levá-las à insolvência, pois constituem provisões matemáticas a menor que o necessário. No próximo capítulo, através do cálculo da

provisão matemática, será demonstrada a importância da utilização de tábua biométrica ajustada à mortalidade da população segurada.

Comparando as tábuas de mortalidade obtidas a partir do modelo dinâmico paramétrico com a família de tábuas VBT-2001, verificamos que as probabilidades de morte desta tábua encontram-se compreendidas no intervalo de probabilidade de 95% das probabilidades de mortes estimadas, para ambos os sexos. Portanto, podemos concluir que as probabilidades de morte estimadas para o ano de 2002 da população que adquire a cobertura de sobrevivência em planos de seguro de vida e previdência complementar aberta no Brasil assemelham-se às probabilidades de morte projetadas para o ano de 2001 dos indivíduos que compram seguro de vida em companhias americanas.

Como era de se esperar as probabilidades de morte do sexo feminino são inferiores às do sexo masculino (ver Gráfico 5.6), esta constatação é usualmente verificada em todas as famílias de tábuas de mortalidade, pois como é de conhecimento público as mulheres possuem uma maior expectativa de vida.

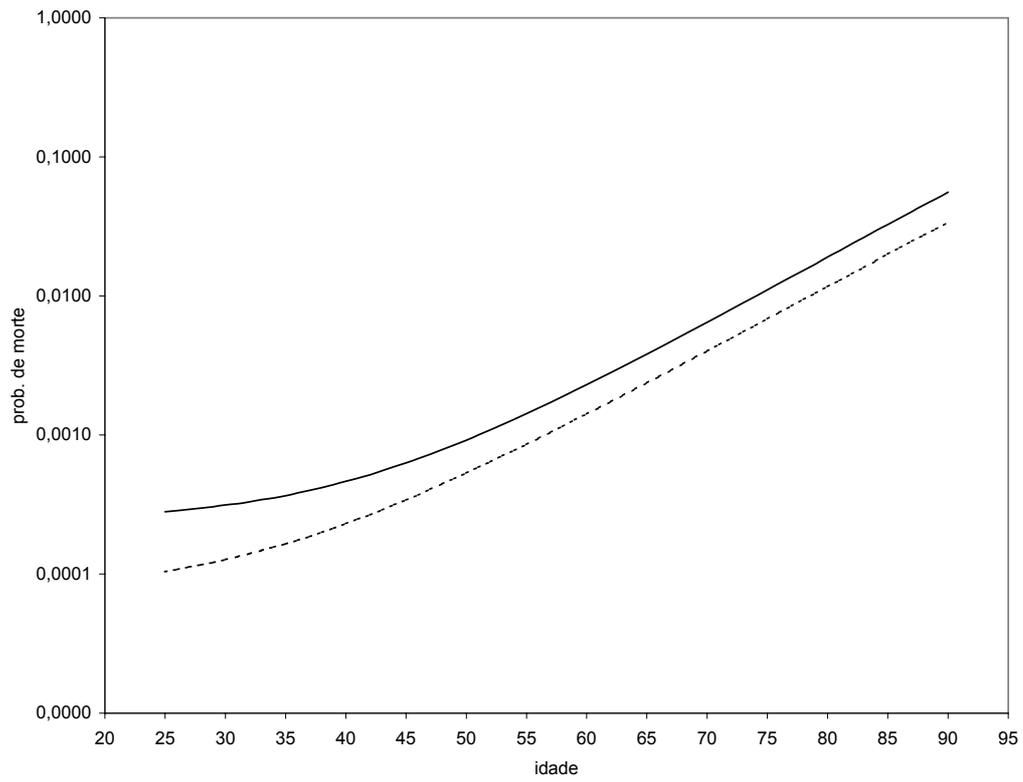


Gráfico 5.6: Comparação entre as tábuas de mortalidade bayesianas construídas para sexo masculino e feminino, em escala logarítmica, onde sexo masculino (linha cheia) e sexo feminino (linha tracejada).

## **Capítulo 6 - Importância da Tábua Biométrica no Cálculo da Provisão Matemática**

Neste capítulo será demonstrada a importância da adequação da tábua biométrica, utilizada na cobertura de sobrevivência dos planos de seguro de vida e previdência, à real mortalidade da população exposta ao risco para que a seguradora/EAPC mantenha-se solvente. Esta demonstração dar-se-á através do cálculo da provisão matemática, por meio de MCMC, fazendo uso dos conceitos de análise de decisões: funções de perda e a classe de medidas de risco denominada valor em risco (*value at risk* - VaR).

As provisões matemáticas refletem o compromisso futuro da seguradora menos o compromisso futuro dos segurados/participantes e se dividem em: provisão matemática de benefícios a conceder - PMBaC, constituída antes da concessão da renda, e provisão matemática de benefícios concedidos - PMBC, constituída durante o período de recebimento da renda pelo assistido.

A PMBC reflete apenas o total dos compromissos futuros da seguradora, pois os assistidos não contribuem mais para o plano, e é calculada pela multiplicação do valor da renda pelo valor da anuidade. No Brasil, as rendas, em sua maioria, são pagas mensalmente e a PMBC é calculada e contabilizada mensalmente, com isso, para cálculo mensal da referida provisão devemos multiplicar o valor da renda mensal pelo valor da anuidade mensal.

Anuidade pode ser definida como sendo o valor presente atuarial das rendas de valor unitário pagas periodicamente durante um determinado período de tempo ou vitaliciamente. Há vários tipos de anuidades, que podem ser classificadas das seguintes formas:

1. quanto à periodicidade dos pagamentos: mensais, bimestrais, trimestrais, semestrais ou anuais;
2. quanto ao período de tempo que serão pagas e para quem serão pagas: vitalícia, vitalícia reversível ao cônjuge, vitalícia reversível ao filho, temporária,...; e

3. quanto ao início de pagamento da renda: antecipada, quando as rendas são pagas no início de cada período e postecipada, quando as rendas são pagas no fim de cada período.

Independente de sua classificação, as anuidades devem ser calculadas através da tábua biométrica, taxa de juros e metodologia fixadas no plano de seguro ou de previdência protocolado no órgão regulamentador. No que diz respeito às metodologias de cálculo das anuidades utilizadas pelo mercado, podemos dizer que se tratam de métodos determinísticos.

Neste capítulo, vamos comparar as provisões matemáticas de benefícios concedidos, considerando que as rendas são pagas vitaliciamente aos assistidos no início do mês, assim obtidas: por meio do método determinístico utilizado pelo mercado segurador, considerando a tábua biométrica fixada no plano, e por meio do cálculo da distribuição a posteriori condicional completa da anuidade (método bayesiano), obtida no WinBUGS, considerando a melhor tábua de mortalidade bayesiana construída no capítulo anterior e fazendo uso de conceitos de funções de perda e valor em risco (*value at risk* - VaR). Vamos considerar a última PMBC citada como o montante necessário a constituir para que a empresa continue solvente.

Para implementarmos o cálculo da PMBC, vamos descrever sucintamente o cálculo determinístico da anuidade mensal vitalícia antecipada para a idade  $x$  ( ${}_{12}\ddot{a}_x$ ), que representa o valor presente atuarial das rendas de valor unitário pagas vitaliciamente no início de cada mês a um indivíduo de idade  $x$ , para mais detalhes ver Bowers *et al.* (1986).

Seja  ${}_kE_x$  o valor de desconto atuarial, isto é, o valor atual da renda de valor unitário devida no tempo  $k$  a um indivíduo de idade  $x$ , então:

$${}_kE_x = \frac{1}{(1+i)^k} \cdot {}_kP_x, \text{ sendo:}$$

$i$ : taxa de juros ao ano; e

${}_kP_x$ : probabilidade de um indivíduo de idade  $x$  sobreviver até a idade  $x + k$ , conforme definido na seção 3.2.

Assim, o valor atual de uma série vitalícia de pagamentos anuais unitários, ou seja, a anuidade anual vitalícia antecipada para a idade  $x$  ( $\ddot{a}_x$ ), pode ser expresso como:

$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \cdot {}_kP_x \quad (6.1)$$

Utilizando o princípio da comutação, muito usado na atuária, podemos simplificar a equação (6.1), para:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^x}{(1+i)^{k+x}} \cdot {}_kP_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^x}{(1+i)^{x+k}} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} = \frac{N_x}{D_x}, \text{ onde:}$$

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k},$$

$$D_x = l_x \cdot \frac{1}{(1+i)^x}, \text{ e}$$

$$l_x = l_{x-1} \cdot q_{x-1}, \text{ sendo:}$$

$l_x$  : número de sobreviventes a cada idade  $x$ ; e

$l_0$  : raiz da tábua, fixada em 10.000.

Como queremos calcular a anuidade mensal vitalícia antecipada, vamos, primeiramente, obter o valor atual das rendas pagas vitaliciamente no começo de cada mês com valor de  $1/12$ , esta renda é denotada por  $\ddot{a}_x^{12}$  e é calculada da seguinte maneira:

$$\ddot{a}_x^{12} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{\frac{k}{12}}} \cdot \frac{{}_kP_x}{12} \quad (6.2)$$

Obtemos a tradicional aproximação da equação (6.2) através da aplicação da fórmula de Woolhouse (Bowers *et al.*, 1986):

$$\ddot{a}_x^{12} = \ddot{a}_x - \frac{11}{24} = \frac{N_x}{D_n} - \frac{11}{24}, \text{ assim:}$$

$$12 \cdot \ddot{a}_x^{12} = 12 \cdot \left( \frac{N_x}{D_n} - \frac{11}{24} \right) \quad (6.3)$$

Para obtenção de distribuições a posteriori condicionais completas para as anuidades em questão, basta implementar o cálculo descrito em (6.3) no WinBUGS, considerando as probabilidades de morte estimadas -  $q_x^r, q_{x+1}^r, \dots, q_{x+k-1}^r$ , obtidas no

capítulo anterior pelo modelo dinâmico paramétrico. O programa utilizado para cálculo das distribuições das anuidades mensais vitalícias antecipadas ( ${}_{12}a_x$ ) está disponível no Anexo IX.

Para cálculo da PMBC através do método bayesiano, ou seja, do valor de provisão necessário para que a companhia esteja solvente, podemos utilizar o conceito de funções de perda para estimar o valor da anuidade a ser utilizada, tratando-se de um problema de decisão. Como descrito em Migon e Lopes (2002), um problema de decisão é especificado pela tripla  $(A, \Theta, L)$ , onde  $A$  é o espaço das ações,  $\Theta$  é o conjunto dos dados da natureza e  $L(\theta, a)$  representa a perda sofrida pela escolha da ação  $a \in A$  quando ocorre  $\theta \in \Theta$ .

Vamos, neste capítulo, considerar três funções de perda:

1. perda quadrática:  $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$ , a minimização dessa perda é alcançada com a média a posteriori;
2. perda absoluta:  $L(\theta, a) = |\theta - a|$ , a minimização dessa perda é alcançada com a mediana da distribuição a posteriori; e
3. perda zero-um:  $L(\theta, a) = \begin{cases} k & \text{se } |\theta - a| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |\theta - a| \leq \varepsilon \end{cases}$ , onde  $\varepsilon > 0$  é arbitrário e  $k$  é uma

constante, em geral igual a um. A minimização dessa perda é alcançada com a moda da distribuição a posteriori.

Então, o valor da PMBC necessária para solvência da empresa é calculado pela multiplicação do valor que minimiza determinada função de perda, a escolha do decisor da companhia, pela renda mensal vitalícia.

O valor da diferença entre a PMBC necessária para que a companhia mantenha-se solvente e a PMBC calculada por meio da tábua de mortalidade e da metodologia determinística aprovadas no plano deve ser aportada pela companhia. Este valor correspondente à provisão adicional de solvência que é denominada provisão de insuficiência de contribuição/prêmio - PIC, devendo obrigatoriamente ser constituída pelas seguradoras e EAPC's por força de regulamentação específica. No entanto, atualmente, as companhias também utilizam métodos determinísticos em seus cálculos.

Podemos, também, calcular esta provisão adicional de solvência utilizando o conceito da probabilidade crítica, conhecida como valor em risco (*value at risk* - VaR). O VaR tem como medida de risco a probabilidade.

Vamos considerar, no cálculo da provisão, um nível de risco  $\alpha$ , então:

$$P(12.\ddot{a}_x^{12} > 12.\ddot{a}_x^{12+} | y_0) = \alpha,$$

onde  $12.\ddot{a}_x^{12+}$  é considerada como *value at risk* de nível  $\alpha$  para este problema.

Para obtenção do VaR com nível de risco de  $\alpha$ , basta considerar o percentil de  $(1-\alpha)$  da amostra da distribuição a posteriori da anuidade em questão.

Portanto, para cálculo da PMBC, por meio do método bayesiano, necessária para que a companhia mantenha-se solvente, devemos multiplicar o *value at risk* de nível  $\alpha$  da distribuição a posteriori da anuidade mensal vitalícia antecipada, sendo o nível de risco uma questão a ser decidida pelo gestor da empresa, pelo valor da renda mensal. Já a provisão de insuficiência de contribuição/prêmio é calculada pela diferença entre essa provisão e a obtida considerando a tábua de mortalidade e a metodologia determinística aprovadas no plano.

É importante frisarmos que, como a maioria das tábuas biométricas possui probabilidades de morte até idades em torno de 115 anos e a tábua de mortalidade bayesiana construída nesta tese até os 90 anos, a comparação entre as provisões matemáticas para idades mais avançadas fica prejudicada.

A seguir, iremos exemplificar a importância da adequação da tábua de mortalidade através do cálculo de provisão, fazendo uso de conceitos de funções de perda e *value at risk*, primeiramente, para um único assistido e, em seguida, para uma massa real de assistidos de uma entidade aberta de previdência complementar (EAPC).

### 6.1 Exemplo de cálculo das provisões para um único assistido

Seja um plano de previdência hipotético que garanta 6% de juros ao ano e tábua de mortalidade AT-83 *Male*, vamos, nesta seção, calcular as provisões de um assistido do sexo masculino com 60 anos de idade que receba uma renda mensal vitalícia no início do mês de valor igual a R\$1.000,00.

Aplicando a equação (6.3), calculamos a anuidade mensal vitalícia antecipada, utilizando a tábua fixada no plano, e obtemos o valor de 141,34 para esta anuidade. Então, a provisão matemática de benefícios concedidos é calculada pelo método determinístico da seguinte forma:

$$PMBC = 141,34 \cdot 1.000,00 = 141.340,00$$

Após a implementação do cálculo da anuidade no WinBUGS, podemos observar, no Gráfico 6.1, a simetria da distribuição de densidade a posteriori da anuidade mensal vitalícia antecipada para idade de 60 anos e sexo masculino dada as demais informações disponíveis. Na Tabela 6.1, apresentamos o sumário estatístico da distribuição a posteriori da anuidade em questão.

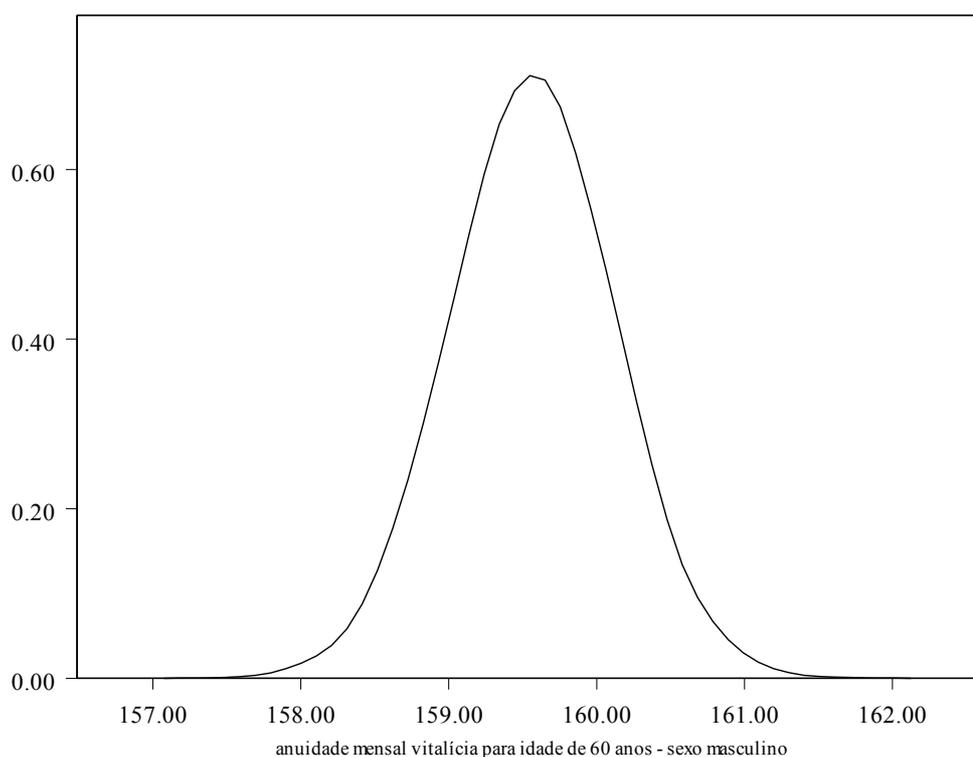


Gráfico 6.1: Distribuição de densidade a posteriori da anuidade mensal vitalícia antecipada para idade de 60 anos, sexo masculino.

Tabela 6.1: Sumário estatístico da distribuição a posteriori da anuidade mensal vitalícia antecipada para idade de 60 anos, sexo masculino.

média	variância	mediana	moda	percentis			
				75,0%	90,0%	95,0%	97,5%
159,60	0,30	159,60	159,60	160,00	160,30	160,50	160,70

Após a obtenção da média, mediana e moda da distribuição a posteriori da anuidade em questão, podemos calcular a PMBC necessária para que a companhia mantenha-se solvente, considerando as funções de perda quadrática, absoluta e zero-um, conforme já apresentado. Como os valores que minimizam tais funções de perda coincidem, o valor da PMBC necessária para solvência será o mesmo, independente da função de perda escolhida pelo decisor:

$$\text{PMBC necessária} = 159,60 \cdot 1.000,00 = 159.600,00.$$

Agora, com base nos resultados apresentados, podemos calcular o valor necessário a ser aportado pela companhia para que a mesma mantenha-se solvente (PIC), utilizando os conceitos de funções de perda:

$$\text{PIC} = 159.600,00 - 141.340,00 = \text{R\$}18.260,00$$

O valor da PIC corresponde a 12,92% do valor da provisão calculada considerando a tábua de mortalidade e a metodologia fixadas no plano de previdência.

Para calcular o valor da PIC utilizando o conceito de *value at risk*, teremos que determinar o nível de risco  $\alpha$ . Na Tabela 6.2, obtemos o valor da anuidade em questão, da PMBC necessária para que a Cia. esteja solvente e da PIC a ser constituída, com níveis de risco de 25,0%, 10,0% e 5,0% e 2,5%.

Tabela 6.2: Cálculo das anuidades e provisões utilizando o conceito de VaR, para diferentes níveis de risco.

nível de risco	anuidade	PMBC necessária	PIC
25.0%	160.00	160,000.00	18,660.00
10.0%	160.30	160,300.00	18,960.00
5.0%	160.50	160,500.00	19,160.00
2.5%	160.70	160,700.00	19,360.00

Analisando a Tabela 6.2, verificamos que quanto menor o nível de risco que a companhia deseje correr, maior a PIC a aportar. Portanto, a tarefa de escolha do nível de risco é muito importante para uma gestão segura da empresa.

## 6.2 Exemplo de cálculo das provisões para uma massa de assistido

Seja uma massa real de assistidos do sexo masculino de uma EAPC, vamos realizar uma avaliação atuarial nesta população para calcularmos o valor da PIC que deverá ser aportada para que a companhia mantenha-se solvente.

O plano de previdência em questão garante taxa de juros de 6% ao ano e AT-49 *Male* como tábua de mortalidade, e paga renda vitalícia no início de cada mês. Na Tabela 6.3, podemos analisar a massa de assistidos do plano.

Tabela 6.3: Sumário da massa de assistidos do plano de previdência de uma EAPC.

	renda	idade
máxima	4.526,94	80
mínima	192,47	58
média	1.177,31	70,52
número de assistidos	25	

Calculando as anuidades, para cada assistido, considerando as bases técnicas fixadas no plano, obtemos, através do método determinístico, um valor total de PMBC de R\$2.701.103,64.

Após obtermos as distribuições de densidade a posteriori das anuidades em questão, podemos calcular, primeiramente, a PMBC necessária para que a EAPC continue solvente, considerando as funções de perda apresentadas neste capítulo. Mais uma vez, os valores que minimizam tais funções de perda coincidem, então, valor da PMBC necessária será o mesmo, independente da função de perda escolhida pelo decisor.

Encontramos R\$3.638.151,95 como o valor da PMBC necessária e R\$937.048,31 como o valor de PIC a ser constituído pelo EAPC, que representa 34,69% do valor da PMBC calculada pelo método determinístico. O valor relativo da PIC

encontrado é maior que o da seção anterior, pois a tábua AT-49 *Male* possui probabilidades de morte superiores a AT-83 *Male*, não podendo mais ser utilizada na cobertura de sobrevivência de novos planos de seguro de vida e previdência a partir das publicações das Resoluções do CNSP n.º 93, de 2002, e n.º 96, de 2002.

Agora, vamos calcular a PMBC necessária para solvência da EAPC e o valor da PIC utilizando o conceito de *value at risk* com níveis de risco de 25,0%, 10,0% e 5,0% e 2,5%, este resultado está apresentado na Tabela 6.4, disposta a seguir:

Tabela 6.4: Cálculo das anuidades e provisões utilizando o conceito de VaR, para diferentes níveis de risco.

nível de risco	PMBC necessária	PIC
25,0%	3.655.128,51	954.024,87
10,0%	3.669.601,09	968.497,45
5,0%	3.678.663,20	977.559,56
2,5%	3.686.267,46	985.163,82

Portanto, fica claro que quanto menor o nível de risco que a EAPC quer assumir maior o valor da provisão adicional de solvência que esta deve aportar para que não haja problemas de insolvência.

## Capítulo 7 - Conclusão

Nesta tese implementamos modelos de graduação bayesiana de taxas de mortalidade utilizando simulação estocástica via cadeias de Markov, fazendo uso do pacote computacional WinBUGS.

As probabilidades de mortes futuras foram estimadas por meio da distribuição preditiva do número de mortes para cada idade, o qual é modelado como sendo Poisson distribuído, considerando que todos os indivíduos com a mesma idade morrem independentemente e com a mesma probabilidade.

Para graduação das taxas de mortalidade apresentamos seis modelos bayesianos: três modelos não paramétricos (em forma livre) e três paramétricos. E, demonstramos que os modelos paramétricos produzem probabilidades de morte mais suavizadas que os não paramétricos, no entanto, isto não quer dizer que tenham melhor ajuste aos dados observados e melhor predição dos dados replicados. Verificamos, também, que os modelos não paramétricos são mais complexos que os paramétricos.

Para cálculo das tábuas biométricas de mortalidade bayesianas, utilizamos modelos estáticos e dinâmicos, baseados nos modelos não paramétrico e paramétrico mais adequados, apresentados no capítulo 4. Verificamos que os modelos dinâmicos são os melhores modelos para construção de tábuas de mortalidade bayesianas, por mensurarem a evolução das taxas de mortalidade no período de tempo analisado (1998 a 2001) e considerarem esta evolução na estimação das probabilidades de morte futuras. Dentre os modelos dinâmicos, concluímos que o modelo dinâmico paramétrico é o modelo mais adequado, para ambos os sexos, para construção de tábuas de mortalidade bayesianas. Além disto, observamos que os modelos dinâmicos são mais complexos que os modelos estáticos.

Após a obtenção das tábuas de mortalidade bayesianas, ficou demonstrado que as tábuas de mortalidade utilizadas atualmente nas coberturas de sobrevivência de planos de seguro de vida e previdência estão defasadas, ou seja, possuem probabilidades de morte superiores à realidade da população estudada, podendo acarretar problemas de insolvência nas sociedades seguradoras e entidades abertas de previdência complementar.

Como esperado, as tábuas de mortalidade bayesianas para o sexo masculino apresentam maiores probabilidades de morte do que as do sexo feminino, pois, como é sabido, as mulheres possuem uma maior expectativa de vida.

Com o objetivo de exemplificar a importância de adequação da tábua de mortalidade, utilizada na cobertura de sobrevivência de um plano de seguro de vida ou previdência, à real mortalidade da população exposta ao risco, para que não haja problema de insolvência nas companhias, comparamos os cálculos da provisão matemática de benefícios concedidos obtidos pelos seguintes métodos:

1. determinístico (adotado pelo mercado segurador), onde utilizamos conhecidas tábuas biométricas de mortalidade; e
2. bayesiano, onde utilizamos MCMC e conceitos de funções de perda e VaR e fizemos uso da tábua de mortalidade bayesiana construída nesta tese.

A partir dessa comparação, apresentamos o cálculo para obtenção de provisão adicional (PIC) que as empresas devem constituir para se manterem solventes.

Com isso, esperamos contribuir, ao propormos modelos de graduação bayesiana, implementados através de pacote estatístico de fácil utilização e que pode ser obtido sem custo, para que as seguradoras e EAPC's possam avaliar as taxas de mortalidade de sua massa exposta ao risco. E, a partir desta avaliação, utilizar tábuas biométricas de mortalidade ajustadas à realidade e assim constituir adequadamente suas provisões, de forma tecnicamente apropriada, para que não haja risco de insolvência.

Uma extensão natural deste trabalho, tendo em vista a tendência de redução da mortalidade e o fato de que as tábuas de mortalidade determinadas nos planos são válidas por um longo período de tempo, é modelar o fator de redução de mortalidade, como realizado em Renshaw e Haberman (2000), mas com enfoque bayesiano. No entanto, como possuímos um período de observação de apenas quatro anos referente ao mercado brasileiro, esta modelagem não foi possível.

## Referências Bibliográficas

- AMERICAN ACADEMY ACTUARIES, 2002. **Final Report of the American Academy of Actuaries Commissioners Standard Ordinary Task Force**. Philadelphia, USA.
- BELTRÃO, K. I. e SUGAHARA, S., 2003. **Taxas de Mortalidade para a População do Produto de Previdência Privada – Período 1998/2000: Estimativas e Comparações com Tábuas do Mercado**. ENCE/IBGE, Rio de Janeiro, Brasil.
- BERG, A., MEYER, R, e YU, J., 2003. **Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models**. Artigo obtido via Internet:
- BOWERS, N. L., GERBER, H. U., HICKMAN J. C., *et al.*, 1986. **Actuarial Mathematics**, 1 ed. Itasca, Illinois, USA, The Society of Actuaries.
- BROFFIT, J. D., 1988. “Increasing and Increasing Convex Bayesian Graduation”. **Transactions of Society of Actuaries**, v. 40, pp. 115-148.
- BROOKS, S. P. e GELMAN, A., 1998. “Alternative Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations”. **Journal of Computational and Graphical Statistics**, v. 7, pp. 434-455.
- CARLIN, B. P., 1992. “A Simple Monte Carlo Approach to Bayesian Graduation”. **Transactions of Society of Actuaries**, v. 44, pp. 55-76.
- GAMERMAN, D., 1996. **Simulação Estocástica via Cadeias de Markov**, 12<sup>a</sup> SINAPE, ABE (Associação Brasileira de Estatística).
- GELFAND, A. E. e GHOSH S. F., 1998. “Model choice: A minimum posterior predictive loss approach”. **Biometrika**, v. 85, pp. 1-11.
- GORDON, R. J., 1998. **Applying the Gibbs Sampler and the Metropolis Algorithm to Bayesian Graduation of Mortality Rates**. M.Sc. dissertation, New York University, New York, USA.
- HABERMAN, S. e RENSHAW, A. E., 1996. “Generalized Linear Models and Actuarial Science”. **The Statistician**, v. 45, n. 4, pp. 407-436.
- HICKMAN, J. C. e MILLER, R. B., 1977. “Notes on Bayesian Graduation”. **Transactions of Society of Actuaries**, v. 29, p.p 1-21.  
<http://yoda.eco.auckland.ac.nz/rjyu/JBESrev1H.pdf>

- JORDAN, C. H., 1991. **Life Contingencies**, 2 ed. Chicago, Illinois, USA, The Society of Actuaries.
- KASS, R. E. e RAFTERY, A. E., 1995. “Bayes Factors”. **Journal of the American Statistical Association**, v. 90, pp. 773-795.
- KIMELDORF, G. S. e JONES, D. A., 1967. “Bayesian Graduation”. **Transactions of Society of Actuaries**, v. 19, p.p 66-112.
- MENDOZA, M., MADRIGAL, A. M. e GUTIÉRREZ-PEÑA, E., 2001. **Predictive Mortality Graduation and the Value at Risk: a Bayesian Approach**. Working Paper DE-C01.5, ITAM, Mexico.
- MIGON, H. S. e GAMERMAN, D., 1993, “Generalized Exponential Growth Models a Bayesian Approach”. **Journal of Forecasting**, v.12, pp. 573-584.
- MIGON, H. S. e LOPES, H. F., 2002, **Análise Bayesiana de Decisões: Aspectos Práticos**, 15ª SINAPE, ABE (Associação Brasileira de Estatística).
- MIGON, H. S. E MOURA, F. S., 2002. **Hierarchical Bayesian Collective Risk Model: an Application in Health Insurance**. Departamento de Métodos Estatísticos – IM –UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- NEWTON, M. A. e RAFTERY, A. E., 1994. “Approximate Bayesian Inference by the Weighted Likelihood Bootstrap (with discussion)”. **Journal of the Royal Statistical Society**, series B, v. 56, pp. 3-48.
- RENSHAW, A. E. e HABERMAN, S., 2000. “Modelling for Mortality Reduction Factors”. **Actuarial Research Paper**, v. 127, City University, London.
- SPIEGELHALTER, D., THOMAS, A., BEST, N., *et al.*, 1996. **BUGS 0.5 – Bayesian inference Using Gibbs Sampling Manual (version ii)**. Obtido via Internet: [www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs).
- SPIEGELHALTER, D., BEST, N., CARLIN, B. P. e LINDE, A., 2002. “Bayesian Measures of Model Complexity and Fit”. **Journal of the Royal Statistical Society**, series B, v. 64, pp. 583-639.
- SPIEGELHALTER, D., THOMAS, A., BEST, N., *et al.*, 2003. **WinBUGS User Manual, version 1.4**. Obtido via Internet: [www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs](http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs).

## Anexo I – Quantidade Central de Expostos ao Risco de Sobrevivência

idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
0	62	32	149	133	129	98	1117	886
1	76	64	318	239	375	330	1233	961
2	88	62	397	288	425	371	1380	1156
3	80	88	344	274	443	370	1340	1111
4	75	72	306	293	400	340	1368	1147
5	69	65	360	257	364	365	1319	1101
6	71	70	288	259	398	328	1266	1132
7	65	74	263	255	339	316	1283	1091
8	72	88	291	237	333	301	1157	1042
9	73	87	279	256	330	302	1201	983
10	88	99	264	277	355	324	1195	1033
11	89	96	300	258	325	352	1231	1010
12	86	108	273	282	360	322	1095	970
13	98	114	274	257	338	347	1071	935
14	258	254	460	426	556	494	1088	900
15	1071	917	865	747	1007	883	1454	1188
16	2156	1787	1770	1443	1529	1344	2082	1543
17	3180	2643	2940	2301	2868	2290	2614	2017
18	3998	3128	4454	3422	4956	3832	4260	3286
19	5779	4067	6460	5013	7946	5920	7097	5373
20	7861	4899	9746	6059	11071	7840	10509	7623
21	10563	5781	12396	7463	15252	9731	13903	9995
22	12314	6525	15168	8786	17579	10799	18674	12449
23	13875	6950	16631	9459	19540	11808	21491	14250
24	15338	7761	18426	10151	20675	12513	24657	16065
25	16468	8291	20373	11344	22853	13334	26857	17160
26	18113	9651	21601	12028	25059	14888	29370	18381
27	20610	9971	23656	13942	27731	16189	32972	20658
28	21342	10909	26328	14417	32269	19094	34216	21021
29	22485	11153	30132	17468	34888	20161	37997	23378
30	24437	11750	28859	15718	38197	22155	40652	24668
31	26518	13010	32142	17033	38441	21167	45583	27525
32	28284	13357	34592	18172	41675	22306	44479	25545
33	31353	14831	37180	18811	43563	23436	47915	26909
34	32736	15089	40644	20795	46537	24256	49921	28156
35	33383	14994	42678	20908	50370	26398	53377	28886
36	33998	15583	43807	21026	51976	26423	58541	31668
37	33365	15016	44452	21757	52615	26603	60894	32076
38	34428	15804	43732	20600	52615	26475	60735	31729
39	34279	15390	45303	21788	51521	25299	60664	31117

idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
40	33244	15379	45761	20980	51417	25685	59112	29600
41	33937	15715	44161	20763	51331	24978	60559	30733
42	32820	15232	45139	21041	51036	24622	58876	29336
43	31916	14865	43106	20289	49667	23981	57073	28169
44	31135	14417	42118	19508	49892	23602	56762	27520
45	28732	13380	41308	18918	45696	21982	54091	26244
46	28599	12817	38475	17488	46763	21793	51874	24999
47	25609	11697	37770	16703	43444	20079	51437	24443
48	25015	10901	34503	15673	41920	19137	46625	22019
49	22576	10258	33216	14324	37981	16884	45205	21045
50	20178	9580	29897	13355	36682	16201	40811	18490
51	19007	9226	27139	12441	32733	14912	39450	17776
52	16848	8212	25321	11613	30070	13789	34830	16142
53	15331	7438	23243	10312	27109	12744	32578	15008
54	13886	6995	20538	9603	22423	10909	30035	14070
55	13239	6543	18414	9018	19543	9886	26947	12536
56	11676	5828	16221	7914	18121	9099	23769	11403
57	9550	4693	14168	6759	15623	8031	21913	10326
58	9355	4629	12342	5929	13822	6946	18871	9105
59	8012	4063	12031	5645	12659	5926	17060	8040
60	7117	3776	10103	5172	12601	5963	14762	6788
61	6289	3306	9068	4715	11479	5279	14709	6916
62	5938	3027	8075	4125	10234	4712	12528	6141
63	5300	2870	8050	3991	9155	4150	11223	5460
64	4681	2492	7421	3792	8766	3895	10130	4887
65	3862	2272	6294	3230	8056	3577	9714	4698
66	3789	2222	5012	2960	7027	3221	8767	4293
67	3221	2008	4982	2949	5824	2799	7708	3837
68	3084	2176	4619	2907	5636	2731	6452	3437
69	2783	1996	4206	2824	4828	2432	6357	3338
70	2240	1735	3437	2593	4755	2333	5392	3022
71	1990	1564	2644	2265	3883	2058	5089	2729
72	1827	1492	2401	2121	3253	1669	4041	2326
73	1591	1277	2305	2034	2802	1516	3444	1912
74	1496	1168	2032	1755	2793	1460	2990	1721
75	1495	961	1930	1603	2402	1300	2952	1640
76	1568	973	1834	1325	2043	1078	2570	1495
77	1475	720	1866	1311	1717	919	2175	1263
78	1374	695	1892	1174	1446	913	1801	1032
79	975	490	1578	965	1213	701	1473	1026

idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
80	736	532	1132	677	1066	590	1198	787
81	523	382	811	652	749	461	1082	647
82	367	217	527	408	584	347	755	517
83	291	208	353	248	381	232	577	385
84	256	140	298	213	289	163	388	281
85	163	106	233	176	227	122	349	199
86	143	73	148	108	192	115	245	169
87	146	66	143	92	130	89	225	141
88	88	30	146	71	129	73	154	114
89	88	22	79	40	129	55	137	89
90	43	29	79	30	71	37	137	57
91	29	14	31	38	69	23	76	43
92	27	12	24	21	27	32	61	25
93	14	9	23	12	19	15	30	36
94	8	3	11	13	16	12	20	18
95	6	3	9	7	11	12	15	11
96	2	2	7	6	4	5	10	11
97	3	3	2	2	4	6	5	6
98	2	0	7	20	2	2	5	5
99	0	0	6	0	2	16	2	2
100	0	0	0	0	5	1	3	4
101	0	0	0	0	0	1	3	2
102	0	0	0	0	0	0	0	1
103	0	0	0	0	0	0	0	0
104	0	0	0	0	0	0	0	0
105	0	0	0	0	0	0	0	0
106	0	0	0	0	0	0	0	0
107	0	0	0	0	0	0	0	0
108	0	0	0	0	0	0	0	0
109	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	0	0	0	0	0
112	0	0	0	0	0	0	0	0
113	0	0	0	0	0	0	0	0
114	0	0	0	0	0	0	0	0
115	0	0	1	0	0	0	0	0
116	0	0	0	0	1	0	0	0

## Anexo II – Número de Mortes Observadas

Idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	2	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	1	0	0	0
15	0	0	0	0	0	3	0	0
16	0	2	2	2	1	2	0	0
17	0	1	0	1	3	0	0	0
18	2	0	3	4	3	6	2	0
19	5	2	2	0	5	3	3	0
20	8	0	4	0	7	7	3	0
21	5	1	6	2	8	10	2	1
22	5	1	15	4	12	6	2	0
23	11	6	8	3	20	6	3	4
24	10	2	12	0	15	7	11	0
25	9	1	12	4	17	7	15	1
26	13	2	21	4	21	13	11	0
27	12	1	10	2	23	6	19	3
28	9	3	15	6	19	9	14	0
29	14	5	11	7	24	14	15	3
30	14	1	20	5	32	11	17	4
31	26	2	21	8	28	12	9	3
32	24	1	19	3	28	13	19	4
33	20	2	22	5	31	14	15	3
34	27	8	23	3	48	8	17	10
35	25	11	19	5	42	20	25	8
36	30	7	32	4	36	11	17	6
37	30	2	27	7	43	17	22	5
38	32	3	34	15	52	19	12	8
39	22	7	41	5	44	19	24	2

Idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
40	24	4	36	14	38	22	40	8
41	21	2	37	7	53	16	20	6
42	25	6	54	15	48	11	24	8
43	23	4	51	10	50	22	18	11
44	36	7	42	7	51	24	29	4
45	33	8	38	9	56	9	20	4
46	23	6	41	11	46	19	33	6
47	28	14	39	16	43	20	27	9
48	33	17	48	37	57	17	27	5
49	34	12	49	23	33	14	35	10
50	30	9	55	18	43	17	55	8
51	36	14	44	13	42	14	27	14
52	40	9	40	21	42	16	39	3
53	32	3	51	11	31	13	48	13
54	30	9	40	8	31	12	39	19
55	26	11	38	13	27	17	49	15
56	32	9	31	11	37	10	48	4
57	37	17	42	16	34	11	35	12
58	27	20	38	25	27	9	48	16
59	40	13	28	11	13	12	36	11
60	29	21	41	17	34	2	32	13
61	39	6	38	15	23	10	46	7
62	34	6	31	13	34	10	33	10
63	24	13	43	12	21	5	37	12
64	26	14	42	26	24	5	42	11
65	30	23	33	17	29	8	24	6
66	16	11	31	16	13	8	33	11
67	25	13	32	14	29	2	33	13
68	23	24	42	22	7	5	33	9
69	31	7	29	29	17	5	32	9
70	29	14	32	23	10	4	55	6
71	15	22	28	14	13	9	37	13
72	20	25	28	28	9	2	45	11
73	28	26	36	23	7	3	29	13
74	30	23	32	29	13	3	34	15
75	46	22	42	34	8	3	33	13
76	38	20	50	31	11	0	31	13
77	77	19	64	25	11	1	35	12
78	57	10	78	36	8	2	29	8
79	54	12	83	22	12	1	16	15

Idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
80	38	12	38	15	7	6	18	12
81	17	9	33	29	3	1	22	14
82	27	3	14	11	6	4	12	6
83	33	8	35	15	2	4	21	6
84	11	2	11	13	3	4	16	1
85	13	8	13	8	4	0	15	1
86	5	5	8	5	3	3	3	5
87	11	3	9	2	3	2	9	4
88	7	2	8	3	0	0	4	0
89	4	0	4	1	4	4	7	1
90	2	1	11	2	1	0	1	2
91	3	1	5	2	3	1	1	2
92	2	0	4	1	2	1	3	3
93	2	0	6	2	0	0	0	0
94	4	0	0	0	0	0	0	0
95	1	0	0	1	0	0	3	0
96	0	0	0	0	0	0	0	1
97	0	0	0	0	0	0	0	0
98	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0	2	0	0	0	0	0	0
100	0	0	0	0	0	0	1	0
101	1	0	0	0	0	0	0	0
102	1	0	0	0	0	0	0	0
103	0	0	0	0	0	0	0	0
104	0	0	0	0	0	0	0	0
105	0	0	0	0	0	0	0	0
106	0	0	0	0	0	0	0	0
107	0	0	0	0	0	0	0	0
108	0	0	0	0	0	0	0	0
109	0	0	0	0	0	0	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	0
111	0	0	0	0	0	0	0	0
112	0	0	0	0	0	0	0	0
113	0	0	0	0	0	0	0	0
114	0	0	0	0	0	0	0	0
115	0	0	0	0	0	0	0	0
116	0	0	0	0	0	0	0	0

### Anexo III – Taxas Brutas de Mortalidade

idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
3	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
4	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
5	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
6	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
8	0,000000	0,000000	0,000000	0,008439	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
9	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
10	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
11	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
12	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
13	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
14	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,001799	0,000000	0,000000	0,000000
15	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,003398	0,000000	0,000000
16	0,000000	0,001119	0,001130	0,001386	0,000654	0,001488	0,000000	0,000000
17	0,000000	0,000378	0,000000	0,000435	0,001046	0,000000	0,000000	0,000000
18	0,000500	0,000000	0,000674	0,001169	0,000605	0,001566	0,000469	0,000000
19	0,000865	0,000492	0,000310	0,000000	0,000629	0,000507	0,000423	0,000000
20	0,001018	0,000000	0,000410	0,000000	0,000632	0,000893	0,000285	0,000000
21	0,000473	0,000173	0,000484	0,000268	0,000525	0,001028	0,000144	0,000100
22	0,000406	0,000153	0,000989	0,000455	0,000683	0,000556	0,000107	0,000000
23	0,000793	0,000863	0,000481	0,000317	0,001024	0,000508	0,000140	0,000281
24	0,000652	0,000258	0,000651	0,000000	0,000726	0,000559	0,000446	0,000000
25	0,000547	0,000121	0,000589	0,000353	0,000744	0,000525	0,000559	0,000058
26	0,000718	0,000207	0,000972	0,000333	0,000838	0,000873	0,000375	0,000000
27	0,000582	0,000100	0,000423	0,000143	0,000829	0,000371	0,000576	0,000145
28	0,000422	0,000275	0,000570	0,000416	0,000589	0,000471	0,000409	0,000000
29	0,000623	0,000448	0,000365	0,000401	0,000688	0,000694	0,000395	0,000128
30	0,000573	0,000085	0,000693	0,000318	0,000838	0,000497	0,000418	0,000162
31	0,000980	0,000154	0,000653	0,000470	0,000728	0,000567	0,000197	0,000109
32	0,000849	0,000075	0,000549	0,000165	0,000672	0,000583	0,000427	0,000157
33	0,000638	0,000135	0,000592	0,000266	0,000712	0,000597	0,000313	0,000111
34	0,000825	0,000530	0,000566	0,000144	0,001031	0,000330	0,000341	0,000355
35	0,000749	0,000734	0,000445	0,000239	0,000834	0,000758	0,000468	0,000277
36	0,000882	0,000449	0,000730	0,000190	0,000693	0,000416	0,000290	0,000189
37	0,000899	0,000133	0,000607	0,000322	0,000817	0,000639	0,000361	0,000156
38	0,000929	0,000190	0,000777	0,000728	0,000988	0,000718	0,000198	0,000252
39	0,000642	0,000455	0,000905	0,000229	0,000854	0,000751	0,000396	0,000064

idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
40	0,000722	0,000260	0,000787	0,000667	0,000739	0,000857	0,000677	0,000270
41	0,000619	0,000127	0,000838	0,000337	0,001033	0,000641	0,000330	0,000195
42	0,000762	0,000394	0,001196	0,000713	0,000941	0,000447	0,000408	0,000273
43	0,000721	0,000269	0,001183	0,000493	0,001007	0,000917	0,000315	0,000391
44	0,001156	0,000486	0,000997	0,000359	0,001022	0,001017	0,000511	0,000145
45	0,001149	0,000598	0,000920	0,000476	0,001225	0,000409	0,000370	0,000152
46	0,000804	0,000468	0,001066	0,000629	0,000984	0,000872	0,000636	0,000240
47	0,001093	0,001197	0,001033	0,000958	0,000990	0,000996	0,000525	0,000368
48	0,001319	0,001559	0,001391	0,002361	0,001360	0,000888	0,000579	0,000227
49	0,001506	0,001170	0,001475	0,001606	0,000869	0,000829	0,000774	0,000475
50	0,001487	0,000939	0,001840	0,001348	0,001172	0,001049	0,001348	0,000433
51	0,001894	0,001517	0,001621	0,001045	0,001283	0,000939	0,000684	0,000788
52	0,002374	0,001096	0,001580	0,001808	0,001397	0,001160	0,001120	0,000186
53	0,002087	0,000403	0,002194	0,001067	0,001144	0,001020	0,001473	0,000866
54	0,002160	0,001287	0,001948	0,000833	0,001383	0,001100	0,001298	0,001350
55	0,001964	0,001681	0,002064	0,001442	0,001382	0,001720	0,001818	0,001197
56	0,002741	0,001544	0,001911	0,001390	0,002042	0,001099	0,002019	0,000351
57	0,003874	0,003622	0,002964	0,002367	0,002176	0,001370	0,001597	0,001162
58	0,002886	0,004321	0,003079	0,004217	0,001953	0,001296	0,002544	0,001757
59	0,004993	0,003200	0,002327	0,001949	0,001027	0,002025	0,002110	0,001368
60	0,004075	0,005561	0,004058	0,003287	0,002698	0,000335	0,002168	0,001915
61	0,006201	0,001815	0,004191	0,003181	0,002004	0,001894	0,003127	0,001012
62	0,005726	0,001982	0,003839	0,003152	0,003322	0,002122	0,002634	0,001628
63	0,004528	0,004530	0,005342	0,003007	0,002294	0,001205	0,003297	0,002198
64	0,005554	0,005618	0,005660	0,006857	0,002738	0,001284	0,004146	0,002251
65	0,007768	0,010123	0,005243	0,005263	0,003600	0,002237	0,002471	0,001277
66	0,004223	0,004950	0,006185	0,005405	0,001850	0,002484	0,003764	0,002562
67	0,007762	0,006474	0,006423	0,004747	0,004979	0,000715	0,004281	0,003388
68	0,007458	0,011029	0,009093	0,007568	0,001242	0,001831	0,005115	0,002619
69	0,011139	0,003507	0,006895	0,010269	0,003521	0,002056	0,005034	0,002696
70	0,012946	0,008069	0,009310	0,008870	0,002103	0,001715	0,010200	0,001985
71	0,007538	0,014066	0,010590	0,006181	0,003348	0,004373	0,007271	0,004764
72	0,010947	0,016756	0,011662	0,013201	0,002767	0,001198	0,011136	0,004729
73	0,017599	0,020360	0,015618	0,011308	0,002498	0,001979	0,008420	0,006799
74	0,020053	0,019692	0,015748	0,016524	0,004654	0,002055	0,011371	0,008716
75	0,030769	0,022893	0,021762	0,021210	0,003331	0,002308	0,011179	0,007927
76	0,024235	0,020555	0,027263	0,023396	0,005384	0,000000	0,012062	0,008696
77	0,052203	0,026389	0,034298	0,019069	0,006407	0,001088	0,016092	0,009501
78	0,041485	0,014388	0,041226	0,030664	0,005533	0,002191	0,016102	0,007752
79	0,055385	0,024490	0,052598	0,022798	0,009893	0,001427	0,010862	0,014620

idade	1998		1999		2000		2001	
	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres	homens	mulheres
80	0,051630	0,022556	0,033569	0,022157	0,006567	0,010169	0,015025	0,015248
81	0,032505	0,023560	0,040691	0,044479	0,004005	0,002169	0,020333	0,021638
82	0,073569	0,013825	0,026565	0,026961	0,010274	0,011527	0,015894	0,011605
83	0,113402	0,038462	0,099150	0,060484	0,005249	0,017241	0,036395	0,015584
84	0,042969	0,014286	0,036913	0,061033	0,010381	0,024540	0,041237	0,003559
85	0,079755	0,075472	0,055794	0,045455	0,017621	0,000000	0,042980	0,005025
86	0,034965	0,068493	0,054054	0,046296	0,015625	0,026087	0,012245	0,029586
87	0,075342	0,045455	0,062937	0,021739	0,023077	0,022472	0,040000	0,028369
88	0,079545	0,066667	0,054795	0,042254	0,000000	0,000000	0,025974	0,000000
89	0,045455	0,000000	0,050633	0,025000	0,031008	0,072727	0,051095	0,011236
90	0,046512	0,034483	0,139241	0,066667	0,014085	0,000000	0,007299	0,035088
91	0,103448	0,071429	0,161290	0,052632	0,043478	0,043478	0,013158	0,046512
92	0,074074	0,000000	0,166667	0,047619	0,074074	0,031250	0,049180	0,120000
93	0,142857	0,000000	0,260870	0,166667	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
94	0,500000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
95	0,166667	0,000000	0,000000	0,142857	0,000000	0,000000	0,200000	0,000000
96	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,090909
97	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
98	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
99	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
100	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,333333	0,000000
101	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
102	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
103	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
104	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
105	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
106	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
107	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
108	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
109	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
110	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
111	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
112	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
113	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
114	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
115	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
116	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

## Anexo IV – Programas Elaborados no WinBUGS para os Modelos de Graduação Bayesiana

### A) Modelo de Carlin modificado com $\beta$ fixo (modelo 1)

```
model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  lambda[i] <- theta[i] * e[i]
  d[i] ~ dpois(lambda[i])}
# prioris
# i =1
theta[1] ~ dgamma(0.001,0.001)I(0,theta[2])
# i = 2,...,65
for (i in 2 : 65) {
  theta[i] ~ dgamma(0.001,0.001) I(theta[i-1],theta[i+1]) }
# i= 66
theta[66] ~ dgamma(0.001,0.001) I(theta[65],1)
# distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
  drep[i] ~ dpois(lambda[i])
  thetaest[i] <- drep[i]/e[i]
  qest[i]<- 1 - exp(-thetaest[i]) }
# EPD
for (i in 1 : 66) {
  dif[i]<- drep[i] - d[i]
  dif2[i]<- pow(dif[i],2) }
Gm<-sum(dif2[])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
```

```

log.like[i]<- d[i]*log(lambda[i]) - lambda[i] - logfact(d[i])
like[i]<- exp(log.like[i])
ilike[i]<- 1/like[i]}

```

## B) Modelo utilizando priori uniforme (modelo 2)

```

model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
lambda[i] <- theta[i] * e[i]
d[i] ~ dpois(lambda[i])}
# prioris
# i = 1
theta[1]~dunif(0, theta[2])
# i = 2,...65
for (i in 2 : 65) {
theta[i]~dunif(theta[i-1], theta[i+1])}
# i = 66
theta[66]~dunif(theta[65], 1)
# distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
drep[i] ~ dpois(lambda[i])
thetaest[i] <- drep[i]/e[i]
qest[i]<- 1 - exp(-thetaest[i]) }
# EPD
for (i in 1 : 66) {
dif[i]<- drep[i] - d[i]
dif2[i]<- pow(dif[i],2) }
Gm<-sum(dif2[])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {

```

```

log.like[i]<- d[i]*log(lambda[i]) - lambda[i] - logfact(d[i])
like[i]<- exp(log.like[i])
ilike[i]<- 1/like[i]}

```

### C) Modelo com reparametrização tipo Broffit (modelo 3)

```

model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
lambda[i] <- theta[i] * e[i]
d[i] ~ dpois(lambda[i])}
# hiperparâmetros
alpha<-2
for (i in 1 : 66) {
beta[i]~dgamma(0.1,0.1)}
#priori
for (i in 1 : 66) {
phi[i]~ dgamma(alpha,beta[i])}
# reparametrização
theta[1]<-phi[1]
for (i in 2 : 66) {
theta[i]<-theta[i-1]+phi[i]}
# distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
drep[i] ~ dpois(lambda[i])
thetaest[i] <- drep[i]/e[i]
qest[i]<- 1 - exp(-thetaest[i]) }
# EPD
for (i in 1 : 66) {
dif[i]<- drep[i] - d[i]
dif2[i]<- pow(dif[i],2) }

```

```
Gm<-sum(dif2[])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
log.like[i]<- d[i]*log(lambda[i]) - lambda[i] - logfact(d[i])
like[i]< - exp(log.like[i])
ilike[i]<- 1/like[i]}}
```

#### D) Modelo com força de mortalidade tipo Gompertz (modelo 4)

```
model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
log(lambda[i]) <- log(e[i]) +log(beta) +Z[i]*log(gamma)
d[i] ~ dpois(lambda[i])
theta[i] <- beta*pow(gamma,Z[i])}
#priors
beta~dnorm(0,0.0001) I(0,)
gamma~dnorm(0,0.0001) I(1,)
# distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
drep[i] ~ dpois(lambda[i])
thetaest[i] <- drep[i]/e[i]
qest[i]<- 1 - exp(-thetaest[i]) }
# EPD
for (i in 1 : 66) {
dif[i]<- drep[i] - d[i]
dif2[i]<- pow(dif[i],2) }
Gm<-sum(dif2[])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
log.like[i]<- d[i]*log(lambda[i]) - lambda[i] - logfact(d[i])
```

```
like[i]<- exp(log.like[i])
ilike[i]<- 1/like[i]}
```

### E) Modelo com força de mortalidade tipo Makeham (modelo 5)

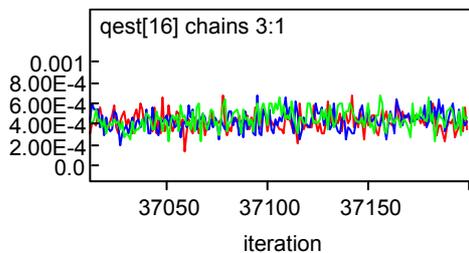
```
model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
log(lambda[i]) <- log(e[i]) +log( alpha + beta*pow(gamma,Z[i]))
d[i] ~ dpois(lambda[i])
theta[i] <- alpha+beta*pow(gamma,Z[i])}
#priors
beta~dnorm(0,0.0001) I(0,)
alpha~dnorm(0,0.0001) I(0,)
gamma~dnorm(0,0.0001) I(1,)
# distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
drep[i] ~ dpois(lambda[i])
thetaest[i] <- drep[i]/e[i]
qest[i]<- 1 - exp(-thetaest[i]) }
# EPD
for (i in 1 : 66) {
dif[i]<- drep[i] - d[i]
dif2[i]<- pow(dif[i],2) }
Gm<-sum(dif2[])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
log.like[i]<- d[i]*log(lambda[i]) - lambda[i] - logfact(d[i])
like[i]<- exp(log.like[i])
ilike[i]<- 1/like[i]}
```

## F) Modelo com força de mortalidade alternativa (modelo 6)

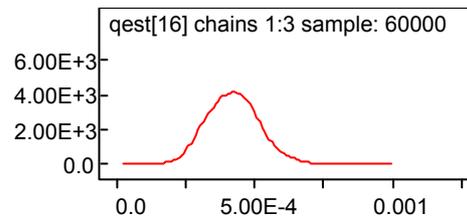
```
model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  log(lambda[i]) <- log(e[i]) + log(-log(1-(alpha+(beta*pow(gamma,Z[i]))
/(1+K*beta* pow(gamma,Z[i])))))
  d[i] ~ dpois(lambda[i])
  theta[i] <- -log(1-(alpha+(beta*pow(gamma,Z[i]))/(1+K*beta*
pow(gamma,Z[i])))))}
#priori
  alpha~dnorm(0,0.0001)I(0,)
  beta~dnorm(0,0.0001)I(0,)
  gamma~dnorm(0,0.0001)I(1,)
  K~dnorm(0,0.0001)I(1,)
# distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
  drep[i] ~ dpois(lambda[i])
  thetaest[i] <- drep[i]/e[i]
  qest[i]<- 1 - exp(-thetaest[i]) }
# EPD
for (i in 1 : 66) {
  dif[i]<- drep[i] - d[i]
  dif2[i]<- pow(dif[i],2) }
Gm<-sum(dif2[])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
  log.like[i]<- d[i]*log(lambda[i]) - lambda[i] - logfact(d[i])
  like[i]<- exp(log.like[i])
  ilike[i]<- 1/like[i]}}
```

**Anexo V – Gráficos de Convergência do capítulo 4:** do parâmetro  $q_{40}^r$  do modelo 1, para o sexo masculino, no ano de 2001.

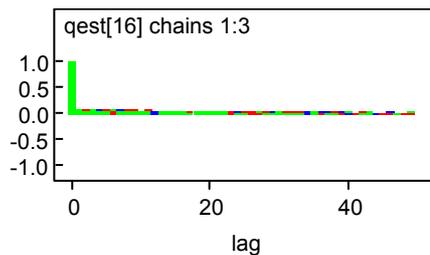
**A. “traces”:**



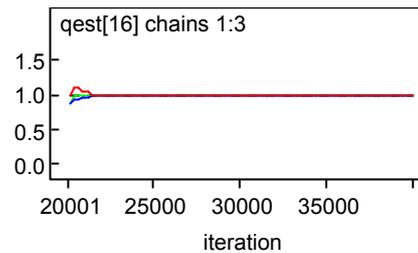
**B. distribuição de densidade:**



**C. função de autocorrelação:**



**D. estatística de Gelman-Rubin:**



## Anexo VI – Programas Elaborados no WinBUGS para Construção de Tábuas Biométricas de Mortalidade Bayesianas

### A) Modelo estático não paramétrico

```
model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    lambda[i,t] <- theta[i] * e[i,t]
    d[i,t] ~ dpois(lambda[i,t]) }}
# prioris
# i =1
theta[1] ~ dgamma(0.001,0.001)I(0,theta[2])
# i =2,...,65
for (i in 2 : 65) {
  theta[i] ~ dgamma(0.001,0.001) I(theta[i-1],theta[i+1]) }
# i= 66
theta[66] ~ dgamma(0.001,0.001) I(theta[65],1)
#distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    drep[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])}
  thetaest[i] <- (drep[i,1] + drep[i,2]+ drep[i,3] +drep[i,4] )/(e[i,1] +
e[i,2]+e[i,3]+e[i,4])
  qest[i]<- 1- exp(-thetaest[i])}
# EPD
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    dif[i,t]<- drep[i,t] - d[i,t]
```

```

dif2[i,t]<- pow(dif[i,t],2)}}
Gm<-sum(dif2[,])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    log.like[i,t]<- d[i,t]*log(lambda[i,t]) - lambda[i,t] - logfact(d[i,t])
    like[i,t]<- exp(log.like[i,t])
    ilike[i,t]<- 1/like[i,t]}}}}

```

## B) Modelo estático paramétrico

```

model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    log(lambda[i,t]) <- log(e[i,t]) +log( alpha+beta*pow(gamma,Z[i]))
    d[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])}
theta[i] <- alpha+beta*pow(gamma,Z[i])}
#priori
beta~dnorm(0,0.0001) I(0,)
alpha~dnorm(0,0.0001) I(0,)
gamma~dnorm(0,0.0001) I(1,)
#distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    drep[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])}
thetaest[i] <- (drep[i,1] + drep[i,2]+ drep[i,3] +drep[i,4] )/(e[i,1] +
e[i,2]+e[i,3]+e[i,4])
qest[i]<- 1- exp(-thetaest[i])}
# EPD
for (i in 1 : 66) {

```

```

for (t in 1 : 4) {
  dif[i,t]<- drep[i,t] - d[i,t]
  dif2[i,t]<- pow(dif[i,t],2)}
Gm<-sum(dif2[,])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    log.like[i,t]<- d[i,t]*log(lambda[i,t]) - lambda[i,t] - logfact(d[i,t])
    like[i,t]< - exp(log.like[i,t])
    ilike[i,t]<- 1/like[i,t]}}}}

```

### C) Modelo dinâmico não paramétrico

```

model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    lambda[i,t] <- theta[i,t] * e[i,t]
    d[i,t] ~ dpois(lambda[i,t]) }}
# priori para t = 1
# i = 1
theta[1,1] ~ dgamma(0.001,0.001) I(0,theta[2,1])
# i = 2,...,65
for (i in 2 : 65) {
  theta[i,1] ~ dgamma(0.001,0.001) I(theta[i-1,1],theta[i+1,1])}
# i = 66
theta[66,1] ~ dgamma(0.001,0.001) I(theta[65,1], 1)
# equação de evolução de parâmetros
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 2 : 4) {
    log(theta[i,t])<- log(theta[i,t-1])+w[t]}}

```

```

# perturbações do sistema
for (t in 2 : 4) {
w[t]~dnorm(0,tau[t])
tau[t]~dgamma(0.01,0.01)
W[t]<- 1/ tau[t]}
#distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    drep[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])}
  thetaest[i] <- (drep[i,4] )/(e[i,4])
  qest[i]<- 1- exp(-thetaest[i])}
# EPD
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    dif[i,t]<- drep[i,t] - d[i,t]
    dif2[i,t]<- pow(dif[i,t],2) }}
Gm<-sum(dif2[,])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    log.like[i,t]<- d[i,t]*log(lambda[i,t]) - lambda[i,t] - logfact(d[i,t])
    like[i,t]<- exp(log.like[i,t])
    ilike[i,t]<- 1/like[i,t]}}}}

```

#### D) Modelo dinâmico paramétrico

```

model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {

```

```

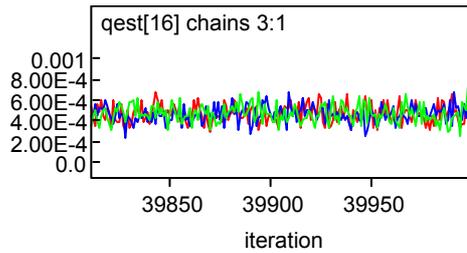
log(lambda[i,t]) <- log(e[i,t]) +log( theta[i,t] )
d[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])
theta[i,t] <- alpha[t]+beta[t]*pow(gamma[t],Z[i])} }
# priori para t = 1
beta[1]~dnorm(0,0001) I(0,)
alpha[1]~dnorm(0,0.0001) I(0,)
gamma[1]~dnorm(0,0.0001) I(1,)
# equação de evolução de parâmetros
for (t in 2 : 4) {
log(alpha[t]) <- log(alpha[t-1]) + wa[t]
log(beta[t])<- log(beta[t-1]) + wb[t]
log(gamma[t]) <- log(gamma[t-1]) + wc[t]
# perturbações do sistema
wa[t]~dnorm(0,taua[t])
wb[t]~dnorm(0,taub[t])
wc[t]~dnorm(0,tauc[t])
taua[t]~dgamma(0.01,0.01)
taub[t]~dgamma(0.01,0.01)
tauc[t]~dgamma(0.01,0.01)
Wa[t]<- 1/ taua[t]
Wb[t] <- 1/ taub[t]
Wc[t] <- 1/ taub[t]}
#distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
for (t in 1 : 4) {
drep[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])}
thetaest[i] <- (drep[i,4] )/(e[i,4])
qest[i]<- 1- exp(-thetaest[i])}
# EPD
for (i in 1 : 66) {
for (t in 1 : 4) {
dif[i,t]<- drep[i,t] - d[i,t]

```

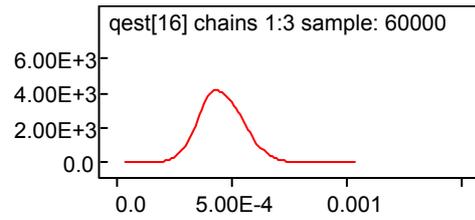
```
dif2[i,t]<- pow(dif[i,t],2) }}
Gm<-sum(dif2[,])
# verossimilhança preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    log.like[i,t]<- d[i,t]*log(lambda[i,t]) - lambda[i,t] - logfact(d[i,t])
    like[i,t]<- exp(log.like[i,t])
    ilike[i,t]<- 1/like[i,t]}}}
```

**Anexo VII – Gráficos de Convergência do capítulo 5:** do parâmetro  $q_{40}^r$  do modelo dinâmico parâmetro, para o sexo masculino.

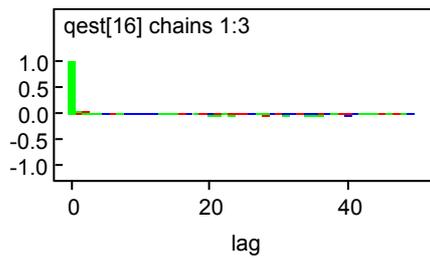
**A. “traces”:**



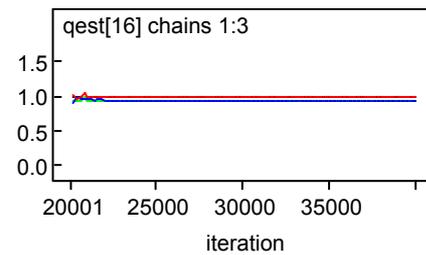
**B. distribuição de densidade:**



**C. função de autocorrelação:**



**D. estatística de Gelman-Rubin:**



## Anexo VIII – Tábuas de Mortalidade Bayesianas

### A) Modelo estático não paramétrico – sexo masculino

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000472	0,000324	0,000635	58	0,002480	0,002002	0,002992
26	0,000506	0,000361	0,000669	59	0,002612	0,002108	0,003170
27	0,000522	0,000381	0,000676	60	0,003000	0,002397	0,003649
28	0,000534	0,000394	0,000683	61	0,003341	0,002692	0,004012
29	0,000548	0,000414	0,000693	62	0,003557	0,002878	0,004260
30	0,000564	0,000431	0,000704	63	0,003766	0,003049	0,004526
31	0,000577	0,000448	0,000715	64	0,004023	0,003253	0,004859
32	0,000591	0,000463	0,000724	65	0,004202	0,003360	0,005108
33	0,000603	0,000481	0,000731	66	0,004407	0,003491	0,005393
34	0,000619	0,000495	0,000748	67	0,005112	0,003995	0,006329
35	0,000632	0,000512	0,000756	68	0,005518	0,004336	0,006798
36	0,000646	0,000526	0,000770	69	0,006144	0,004776	0,007619
37	0,000662	0,000543	0,000789	70	0,007175	0,005609	0,008808
38	0,000681	0,000559	0,000809	71	0,007613	0,005936	0,009436
39	0,000701	0,000579	0,000829	72	0,008743	0,006747	0,010960
40	0,000723	0,000596	0,000854	73	0,009972	0,007661	0,012540
41	0,000745	0,000616	0,000884	74	0,011740	0,008981	0,014710
42	0,000778	0,000644	0,000920	75	0,014340	0,011210	0,017720
43	0,000807	0,000666	0,000957	76	0,016460	0,012890	0,020380
44	0,000842	0,000700	0,000995	77	0,023940	0,019710	0,028350
45	0,000872	0,000718	0,001030	78	0,025450	0,021120	0,029940
46	0,000904	0,000748	0,001074	79	0,026680	0,021900	0,031740
47	0,000949	0,000777	0,001130	80	0,027320	0,022020	0,032850
48	0,001066	0,000871	0,001276	81	0,028260	0,022180	0,034770
49	0,001143	0,000935	0,001366	82	0,030420	0,022580	0,039070
50	0,001304	0,001073	0,001551	83	0,038300	0,028310	0,049300
51	0,001363	0,001123	0,001621	84	0,039580	0,028030	0,052200
52	0,001483	0,001213	0,001764	85	0,041340	0,028400	0,055010
53	0,001595	0,001312	0,001901	86	0,043000	0,028430	0,059940
54	0,001688	0,001380	0,002024	87	0,046380	0,029070	0,064590
55	0,001842	0,001483	0,002224	88	0,049780	0,030470	0,070860
56	0,002092	0,001689	0,002533	89	0,053730	0,031820	0,079780
57	0,002318	0,001876	0,002788	90	0,061430	0,032780	0,095160

**B) Modelo estático paramétrico – sexo masculino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000545	0,000393	0,000705	58	0,002333	0,001929	0,002754
26	0,000549	0,000404	0,000711	59	0,002561	0,002108	0,003030
27	0,000555	0,000410	0,000705	60	0,002818	0,002330	0,003337
28	0,000561	0,000429	0,000709	61	0,003108	0,002572	0,003652
29	0,000567	0,000438	0,000709	62	0,003431	0,002824	0,004071
30	0,000575	0,000446	0,000711	63	0,003797	0,003138	0,004467
31	0,000583	0,000455	0,000715	64	0,004207	0,003478	0,004956
32	0,000593	0,000470	0,000724	65	0,004669	0,003860	0,005499
33	0,000603	0,000481	0,000731	66	0,005189	0,004301	0,006121
34	0,000615	0,000495	0,000742	67	0,005776	0,004773	0,006832
35	0,000629	0,000512	0,000751	68	0,006430	0,005342	0,007601
36	0,000644	0,000526	0,000764	69	0,007171	0,005980	0,008438
37	0,000660	0,000543	0,000779	70	0,008005	0,006614	0,009434
38	0,000680	0,000564	0,000804	71	0,008941	0,007396	0,010600
39	0,000702	0,000584	0,000824	72	0,009989	0,008211	0,011820
40	0,000726	0,000607	0,000854	73	0,011170	0,009128	0,013320
41	0,000753	0,000626	0,000879	74	0,012490	0,010260	0,014820
42	0,000784	0,000660	0,000915	75	0,013990	0,011550	0,016610
43	0,000819	0,000688	0,000957	76	0,015670	0,013010	0,018540
44	0,000858	0,000722	0,001000	77	0,017550	0,014550	0,020660
45	0,000901	0,000759	0,001048	78	0,019670	0,016290	0,023220
46	0,000951	0,000802	0,001104	79	0,022030	0,018160	0,026180
47	0,001006	0,000853	0,001168	80	0,024690	0,019890	0,029800
48	0,001068	0,000905	0,001242	81	0,027680	0,021870	0,033550
49	0,001139	0,000964	0,001323	82	0,031030	0,023890	0,038640
50	0,001218	0,001026	0,001418	83	0,034810	0,025880	0,043950
51	0,001307	0,001098	0,001520	84	0,039010	0,028030	0,049890
52	0,001407	0,001185	0,001642	85	0,043700	0,031390	0,056960
53	0,001520	0,001281	0,001769	86	0,048970	0,033760	0,065090
54	0,001646	0,001380	0,001920	87	0,054840	0,038080	0,073260
55	0,001789	0,001496	0,002097	88	0,061480	0,041660	0,083360
56	0,001949	0,001618	0,002290	89	0,068800	0,045140	0,094540
57	0,002130	0,001762	0,002511	90	0,076980	0,050210	0,106100

**C) Modelo dinâmico não paramétrico – sexo masculino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000344	0,000149	0,000596	58	0,001841	0,001218	0,002487
26	0,000369	0,000170	0,000613	59	0,001938	0,001289	0,002693
27	0,000380	0,000182	0,000606	60	0,002233	0,001489	0,003111
28	0,000389	0,000205	0,000614	61	0,002500	0,001698	0,003394
29	0,000400	0,000211	0,000605	62	0,002660	0,001755	0,003665
30	0,000411	0,000221	0,000615	63	0,002822	0,001869	0,003913
31	0,000421	0,000241	0,000614	64	0,003017	0,001972	0,004138
32	0,000430	0,000247	0,000629	65	0,003163	0,002057	0,004417
33	0,000439	0,000271	0,000647	66	0,003317	0,002165	0,004666
34	0,000451	0,000280	0,000641	67	0,003836	0,002462	0,005305
35	0,000461	0,000281	0,000656	68	0,004124	0,002631	0,005872
36	0,000471	0,000307	0,000666	69	0,004606	0,002984	0,006429
37	0,000483	0,000312	0,000673	70	0,005439	0,003518	0,007575
38	0,000499	0,000329	0,000691	71	0,005777	0,003727	0,008024
39	0,000512	0,000330	0,000709	72	0,006594	0,004198	0,009360
40	0,000530	0,000355	0,000727	73	0,007464	0,004635	0,010690
41	0,000546	0,000363	0,000743	74	0,008775	0,005337	0,012630
42	0,000570	0,000374	0,000781	75	0,010620	0,006752	0,014790
43	0,000592	0,000403	0,000806	76	0,012070	0,007752	0,016970
44	0,000619	0,000423	0,000845	77	0,017160	0,011430	0,023180
45	0,000640	0,000425	0,000869	78	0,018180	0,012140	0,024680
46	0,000665	0,000443	0,000906	79	0,019160	0,012150	0,026790
47	0,000700	0,000467	0,000952	80	0,019620	0,012440	0,027980
48	0,000788	0,000536	0,001072	81	0,020390	0,011940	0,029140
49	0,000845	0,000575	0,001150	82	0,022170	0,011850	0,033850
50	0,000968	0,000661	0,001298	83	0,028130	0,015480	0,042400
51	0,001015	0,000710	0,001368	84	0,029010	0,012800	0,047790
52	0,001102	0,000746	0,001492	85	0,030410	0,014220	0,050270
53	0,001185	0,000798	0,001595	86	0,031510	0,012170	0,055540
54	0,001253	0,000865	0,001697	87	0,033860	0,013240	0,060330
55	0,001363	0,000927	0,001854	88	0,036300	0,012900	0,068940
56	0,001550	0,001051	0,002101	89	0,039600	0,007273	0,077150
57	0,001722	0,001186	0,002325	90	0,045650	0,014490	0,083860

**D) Modelo dinâmico paramétrico – sexo masculino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000281	0,000112	0,000521	58	0,001889	0,001271	0,002540
26	0,000286	0,000102	0,000511	59	0,002089	0,001406	0,002810
27	0,000292	0,000121	0,000485	60	0,002303	0,001557	0,003111
28	0,000298	0,000117	0,000497	61	0,002544	0,001766	0,003394
29	0,000305	0,000132	0,000500	62	0,002811	0,001914	0,003824
30	0,000314	0,000148	0,000492	63	0,003110	0,002136	0,004179
31	0,000321	0,000176	0,000504	64	0,003453	0,002366	0,004629
32	0,000331	0,000180	0,000517	65	0,003819	0,002673	0,005134
33	0,000342	0,000188	0,000522	66	0,004239	0,002961	0,005687
34	0,000353	0,000200	0,000541	67	0,004707	0,003238	0,006337
35	0,000366	0,000206	0,000543	68	0,005238	0,003558	0,007104
36	0,000383	0,000222	0,000547	69	0,005824	0,004082	0,007834
37	0,000400	0,000246	0,000575	70	0,006462	0,004441	0,008679
38	0,000419	0,000263	0,000593	71	0,007198	0,004901	0,009582
39	0,000440	0,000280	0,000626	72	0,008007	0,005429	0,010830
40	0,000464	0,000288	0,000643	73	0,008933	0,005790	0,012410
41	0,000489	0,000314	0,000677	74	0,009924	0,006667	0,013620
42	0,000518	0,000340	0,000713	75	0,011060	0,007425	0,015130
43	0,000553	0,000368	0,000753	76	0,012340	0,008138	0,016970
44	0,000590	0,000388	0,000810	77	0,013740	0,009153	0,019130
45	0,000630	0,000425	0,000850	78	0,015260	0,009945	0,021420
46	0,000677	0,000463	0,000906	79	0,017010	0,010800	0,024140
47	0,000726	0,000505	0,000972	80	0,019020	0,011620	0,027170
48	0,000784	0,000536	0,001050	81	0,021170	0,012860	0,030040
49	0,000848	0,000597	0,001128	82	0,023670	0,013160	0,035130
50	0,000919	0,000637	0,001224	83	0,026310	0,013770	0,040740
51	0,001000	0,000684	0,001343	84	0,029410	0,012800	0,047790
52	0,001089	0,000746	0,001463	85	0,032630	0,014220	0,052990
53	0,001187	0,000828	0,001595	86	0,036260	0,016190	0,063220
54	0,001301	0,000899	0,001730	87	0,040440	0,017620	0,068640
55	0,001424	0,001001	0,001891	88	0,045090	0,012900	0,080950
56	0,001563	0,001051	0,002101	89	0,049950	0,014490	0,090530
57	0,001716	0,001186	0,002279	90	0,055720	0,021660	0,097140

**E) Modelo estático não paramétrico – sexo feminino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000189	0,000060	0,000339	58	0,002028	0,001464	0,002665
26	0,000230	0,000109	0,000382	59	0,002122	0,001519	0,002784
27	0,000247	0,000115	0,000395	60	0,002235	0,001565	0,002945
28	0,000266	0,000138	0,000413	61	0,002330	0,001631	0,003111
29	0,000280	0,000166	0,000416	62	0,002497	0,001720	0,003381
30	0,000291	0,000175	0,000431	63	0,002783	0,001880	0,003757
31	0,000302	0,000178	0,000432	64	0,003296	0,002320	0,004436
32	0,000312	0,000189	0,000453	65	0,003595	0,002537	0,004778
33	0,000325	0,000202	0,000464	66	0,003836	0,002673	0,005104
34	0,000339	0,000215	0,000476	67	0,004138	0,002928	0,005504
35	0,000356	0,000230	0,000493	68	0,004685	0,003282	0,006201
36	0,000367	0,000243	0,000507	69	0,005026	0,003581	0,006586
37	0,000381	0,000251	0,000524	70	0,005502	0,003916	0,007305
38	0,000400	0,000275	0,000539	71	0,006743	0,004743	0,009119
39	0,000414	0,000278	0,000555	72	0,008351	0,005897	0,010980
40	0,000432	0,000295	0,000578	73	0,009646	0,006948	0,012680
41	0,000446	0,000304	0,000596	74	0,011170	0,008157	0,014470
42	0,000466	0,000321	0,000620	75	0,012590	0,009222	0,016220
43	0,000492	0,000344	0,000653	76	0,013820	0,010210	0,017700
44	0,000513	0,000353	0,000682	77	0,014510	0,010620	0,018810
45	0,000538	0,000373	0,000720	78	0,015420	0,011200	0,019970
46	0,000604	0,000415	0,000817	79	0,016580	0,011870	0,021750
47	0,000766	0,000535	0,001014	80	0,018240	0,012670	0,024430
48	0,000874	0,000635	0,001136	81	0,020690	0,014360	0,028060
49	0,000914	0,000656	0,001183	82	0,022090	0,014000	0,031070
50	0,000951	0,000694	0,001231	83	0,025530	0,015720	0,036590
51	0,000993	0,000717	0,001287	84	0,027890	0,016180	0,041760
52	0,001036	0,000743	0,001366	85	0,031330	0,016450	0,048530
53	0,001088	0,000769	0,001427	86	0,034670	0,017020	0,054270
54	0,001182	0,000841	0,001562	87	0,037780	0,017880	0,059980
55	0,001299	0,000921	0,001736	88	0,043490	0,020480	0,073060
56	0,001383	0,000963	0,001867	89	0,049800	0,019230	0,088110
57	0,001771	0,001207	0,002378	90	0,064050	0,025480	0,115400

**F) Modelo estático paramétrico – sexo feminino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000278	0,000140	0,000439	58	0,001794	0,001277	0,002327
26	0,000282	0,000146	0,000437	59	0,001978	0,001435	0,002573
27	0,000287	0,000165	0,000428	60	0,002185	0,001565	0,002853
28	0,000292	0,000168	0,000428	61	0,002416	0,001730	0,003111
29	0,000299	0,000180	0,000430	62	0,002677	0,001942	0,003492
30	0,000306	0,000188	0,000444	63	0,002965	0,002122	0,003817
31	0,000313	0,000191	0,000444	64	0,003291	0,002386	0,004238
32	0,000323	0,000202	0,000453	65	0,003655	0,002681	0,004706
33	0,000333	0,000214	0,000464	66	0,004058	0,002987	0,005183
34	0,000344	0,000227	0,000476	67	0,004514	0,003358	0,005762
35	0,000356	0,000241	0,000493	68	0,005027	0,003725	0,006377
36	0,000370	0,000253	0,000496	69	0,005593	0,004239	0,007054
37	0,000386	0,000262	0,000524	70	0,006236	0,004636	0,007920
38	0,000403	0,000275	0,000539	71	0,006948	0,005204	0,008774
39	0,000423	0,000288	0,000566	72	0,007740	0,005767	0,009810
40	0,000444	0,000316	0,000589	73	0,008645	0,006506	0,010920
41	0,000469	0,000336	0,000618	74	0,009639	0,007181	0,012210
42	0,000496	0,000355	0,000654	75	0,010760	0,008141	0,013710
43	0,000526	0,000378	0,000687	76	0,012000	0,008989	0,015270
44	0,000560	0,000400	0,000729	77	0,013390	0,009917	0,016940
45	0,000599	0,000435	0,000782	78	0,014960	0,011200	0,018940
46	0,000642	0,000467	0,000830	79	0,016710	0,012180	0,021440
47	0,000689	0,000507	0,000891	80	0,018650	0,013430	0,024050
48	0,000743	0,000546	0,000959	81	0,020810	0,014820	0,027160
49	0,000803	0,000592	0,001039	82	0,023250	0,015990	0,031070
50	0,000870	0,000625	0,001127	83	0,025990	0,016640	0,036590
51	0,000945	0,000680	0,001213	84	0,029010	0,017410	0,041760
52	0,001029	0,000743	0,001326	85	0,032380	0,018080	0,046950
53	0,001125	0,000813	0,001449	86	0,036080	0,019130	0,054270
54	0,001229	0,000889	0,001586	87	0,040280	0,022930	0,059980
55	0,001347	0,000973	0,001736	88	0,045050	0,023850	0,069850
56	0,001479	0,001080	0,001896	89	0,050190	0,023980	0,083670
57	0,001628	0,001173	0,002111	90	0,055860	0,025480	0,092240

**G) Modelo dinâmico não paramétrico – sexo feminino**

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000112	0,000000	0,000291	58	0,001229	0,000549	0,001975
26	0,000135	0,000000	0,000326	59	0,001287	0,000497	0,002112
27	0,000145	0,000000	0,000339	60	0,001349	0,000589	0,002354
28	0,000157	0,000000	0,000333	61	0,001405	0,000578	0,002455
29	0,000167	0,000043	0,000342	62	0,001505	0,000651	0,002602
30	0,000174	0,000041	0,000365	63	0,001671	0,000732	0,002926
31	0,000180	0,000036	0,000363	64	0,001980	0,000818	0,003268
32	0,000187	0,000039	0,000391	65	0,002163	0,000851	0,003612
33	0,000195	0,000037	0,000372	66	0,002299	0,000931	0,003951
34	0,000204	0,000071	0,000391	67	0,002468	0,001042	0,004160
35	0,000215	0,000069	0,000415	68	0,002762	0,001163	0,004643
36	0,000221	0,000063	0,000410	69	0,002967	0,001197	0,005078
37	0,000230	0,000094	0,000405	70	0,003240	0,001323	0,005610
38	0,000241	0,000095	0,000441	71	0,003963	0,001830	0,006572
39	0,000249	0,000096	0,000450	72	0,004853	0,002147	0,008135
40	0,000261	0,000101	0,000473	73	0,005571	0,002610	0,009365
41	0,000270	0,000098	0,000455	74	0,006453	0,002899	0,010970
42	0,000282	0,000102	0,000477	75	0,007296	0,003650	0,012110
43	0,000297	0,000107	0,000532	76	0,007983	0,004003	0,013280
44	0,000310	0,000109	0,000545	77	0,008371	0,003948	0,014140
45	0,000325	0,000114	0,000571	78	0,008905	0,003868	0,015380
46	0,000366	0,000160	0,000640	79	0,009637	0,003887	0,016420
47	0,000466	0,000205	0,000777	80	0,010660	0,003800	0,018860
48	0,000531	0,000227	0,000863	81	0,012150	0,004619	0,021370
49	0,000554	0,000238	0,000902	82	0,013030	0,003861	0,024830
50	0,000576	0,000270	0,000973	83	0,015210	0,005181	0,028170
51	0,000603	0,000281	0,001012	84	0,016660	0,003552	0,034960
52	0,000629	0,000248	0,001053	85	0,018640	0,000000	0,039400
53	0,000660	0,000267	0,001132	86	0,020710	0,000000	0,046230
54	0,000714	0,000284	0,001207	87	0,022570	0,000000	0,048430
55	0,000788	0,000319	0,001355	88	0,025750	0,000000	0,059560
56	0,000837	0,000351	0,001402	89	0,030470	0,000000	0,075640
57	0,001076	0,000484	0,001838	90	0,039140	0,000000	0,099910

### H) Modelo dinâmico paramétrico – sexo feminino

idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade		idade	prob. de morte estimada	intervalo de probabilidade	
		2,50%	97,50%			2,50%	97,50%
25	0,000104	0,000000	0,000291	58	0,001154	0,000549	0,001865
26	0,000108	0,000000	0,000272	59	0,001284	0,000497	0,002112
27	0,000112	0,000000	0,000290	60	0,001415	0,000589	0,002354
28	0,000117	0,000000	0,000285	61	0,001567	0,000723	0,002599
29	0,000121	0,000000	0,000299	62	0,001738	0,000814	0,002926
30	0,000127	0,000000	0,000284	63	0,001926	0,000915	0,003108
31	0,000133	0,000000	0,000291	64	0,002137	0,001022	0,003472
32	0,000140	0,000000	0,000313	65	0,002369	0,001064	0,003824
33	0,000148	0,000037	0,000297	66	0,002634	0,001164	0,004183
34	0,000157	0,000036	0,000320	67	0,002920	0,001302	0,004679
35	0,000165	0,000035	0,000346	68	0,003251	0,001453	0,005222
36	0,000175	0,000032	0,000347	69	0,003612	0,001795	0,005972
37	0,000186	0,000062	0,000343	70	0,004019	0,001983	0,006596
38	0,000200	0,000063	0,000378	71	0,004461	0,002195	0,007299
39	0,000214	0,000064	0,000386	72	0,004937	0,002147	0,008135
40	0,000231	0,000068	0,000439	73	0,005525	0,002610	0,009365
41	0,000248	0,000098	0,000455	74	0,006129	0,002899	0,010400
42	0,000266	0,000102	0,000477	75	0,006845	0,003042	0,011510
43	0,000289	0,000107	0,000497	76	0,007608	0,003337	0,012620
44	0,000314	0,000109	0,000545	77	0,008441	0,003948	0,014140
45	0,000340	0,000152	0,000571	78	0,009435	0,003868	0,015380
46	0,000370	0,000160	0,000640	79	0,010480	0,004857	0,017370
47	0,000407	0,000164	0,000695	80	0,011650	0,005063	0,020100
48	0,000445	0,000182	0,000772	81	0,012910	0,004619	0,022880
49	0,000486	0,000190	0,000807	82	0,014410	0,005786	0,024830
50	0,000532	0,000216	0,000919	83	0,015970	0,005181	0,030690
51	0,000586	0,000281	0,000956	84	0,017860	0,003552	0,034960
52	0,000642	0,000248	0,001053	85	0,020020	0,005013	0,044220
53	0,000710	0,000333	0,001199	86	0,022190	0,000000	0,046230
54	0,000775	0,000355	0,001278	87	0,024770	0,000000	0,055160
55	0,000853	0,000399	0,001435	88	0,027380	0,000000	0,059560
56	0,000944	0,000438	0,001577	89	0,030220	0,000000	0,075640
57	0,001045	0,000484	0,001741	90	0,033620	0,000000	0,083980

## Anexo IX – Programa Elaborado no WinBUGS para Cálculo da Anuidade Mensal Vitalícia Antecipada

```
model{
# função de verossimilhança
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
    log(lambda[i,t]) <- log(e[i,t]) +log( theta[i,t] )
    d[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])
    theta[i,t] <- alpha[t]+beta[t]*pow(gamma[t],Z[i])} }
# priori para t = 1
beta[1]~dnorm(0,0001) I(0,)
alpha[1]~dnorm(0,0.0001) I(0,)
gamma[1]~dnorm(0,0.0001) I(1,)
# equação de evolução de parâmetros
for (t in 2 : 4) {
  log(alpha[t]) <- log(alpha[t-1]) + wa[t]
  log(beta[t])<- log(beta[t-1]) + wb[t]
  log(gamma[t]) <- log(gamma[t-1]) + wc[t]
# perturbações do sistema
  wa[t]~dnorm(0,taua[t])
  wb[t]~dnorm(0,taub[t])
  wc[t]~dnorm(0,tauc[t])
  taua[t]~dgamma(0.01,0.01)
  taub[t]~dgamma(0.01,0.01)
  tauc[t]~dgamma(0.01,0.01)
  Wa[t]<- 1/ taua[t]
  Wb[t] <- 1/ taub[t]
  Wc[t] <- 1/ taub[t]}
#distribuição preditiva
for (i in 1 : 66) {
  for (t in 1 : 4) {
```

```

drep[i,t] ~ dpois(lambda[i,t])
thetaest[i] <- (drep[i,4] )/(e[i,4])
qest[i]<- 1- exp(-thetaest[i])
# cálculo das anuidades
l[1]<-10000
for (i in 2 : 66) {
  l[i]<-l[i-1]*(1-qest[i-1])}
juro <- 0.06
v <- (1/(1+juro))
for (i in 1 : 66) {
  vz[i] <-pow(v,Z[i])
D[i]<-l[i]*vz[i]}
N[1]<- sum(D[])
for (i in 2 : 66) {
N[i]<-N[i-1] - D[i-1]}
for (i in 1 : 66) {
anui[i]<-12*(N[i]/D[i] - 11/24)}
}

```